# 7. Ordnungsstrukturen - Themenübersicht

**Ordnungsstrukturen**

**Verbände**

- Algebraische Verbände

**Spezielle Verbände**

- Boolesche Verbände
- Vollständige Verbände

**Ordnungserhaltende Abbildungen**

# Ordnungsstrukturen

Beispiele partieller Ordnungen:

- $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$: Potenzmengen mit Inklusionsbeziehung
- $(\mathcal{BT}|_{\equiv}, \Rightarrow)$: Klassen semantisch äquivalenter Boolesche Terme mit der Implikationsbeziehung
- $(\mathbb{N}, |)$: Natürliche Zahlen mit der Teilbarkeitsbeziehung

# Verbände

**Definition 7.1** (Obere und untere Schranken)

Sei $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung und $X \subseteq M$.

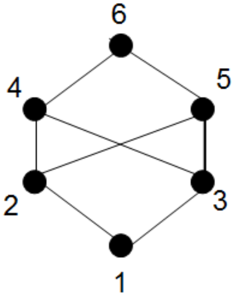
1.
   - $y \in M$ heißt <u>obere Schranke</u> von $X \Leftrightarrow_{df} \forall x \in X.\ x \preceq y$.
     Konvention $X \preceq y$.
   - Die Menge der oberen Schranken von $X$ ist
     $\mathcal{O}_X =_{df} \{y \in M \mid X \preceq y\}$.
   - Hat $\mathcal{O}_X$ ein kleinstes Element y, so schreiben wir $y = \sup(X)$

2.
   - $y \in M$ heißt <u>untere Schranke</u> von $X \Leftrightarrow_{df} \forall x \in X.\ y \preceq x$.
     Konvention $y \preceq X$.
   - Die Menge der unteren Schranken von $X$ ist
     $\mathcal{U}_X =_{df} \{y \in M \mid y \preceq X\}$.
   - Hat $\mathcal{U}_X$ ein größtes Element, so schreiben wir $\inf(X)$

# Verbände

**Definition 7.2** (Verband)

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt Verband $\Leftrightarrow_{df}$
$\forall\, x, y \in V.\ \inf(\{x, y\})$ existiert $\wedge$ $\sup(\{x, y\})$ existiert

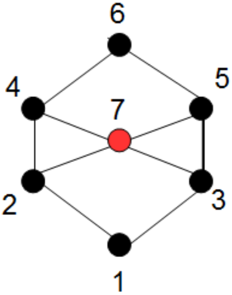



**Kein** Verband **!**

# Verbände

**Definition 7.2** (Verband)

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt <u>Verband</u> $\Leftrightarrow_{df}$
$\forall x, y \in V.\ \inf(\{x, y\})$ existiert $\wedge$ $\sup(\{x, y\})$ existiert

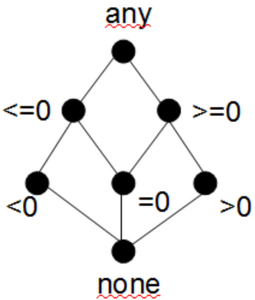


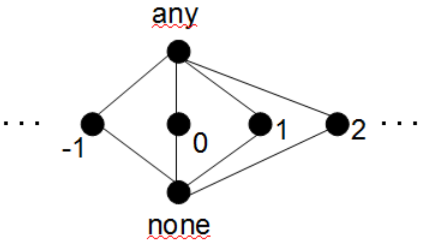

**Kein** Verband **!**

# Verbände

**Definition 7.2** (Verband)

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt Verband $\Leftrightarrow_{df}$
$\forall\, x, y \in V.\ \inf(\{x, y\})$ existiert $\wedge$ $\sup(\{x, y\})$ existiert




a) Verband der Vorzeicheninformationen ganzer Zahlen,

b) Flacher Verband ganzer Zahlen

# Algebraische Verbände

## Satz 7.3

Sei $(V, \preceq)$ ein Verband. Dann gilt für alle $x, y, z \in V$:

1. Assoziativität:
   1. $(x \curlywedge y) \curlywedge z = x \curlywedge (y \curlywedge z)$ $\qquad x \curlywedge y =_{df} \inf(x, y)$
   2. $(x \curlyvee y) \curlyvee z = x \curlyvee (y \curlyvee z)$ $\qquad x \curlyvee y =_{df} \sup(x, y)$
2. Kommutativität:
   1. $x \curlywedge y = y \curlywedge x$
   2. $x \curlyvee y = y \curlyvee x$
3. Absorption:
   1. $x \curlywedge (x \curlyvee y) = x$
   2. $x \curlyvee (x \curlywedge y) = x$

# Algebraische Verbände

**Lemma 7.4** (Idempotenz)

Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein algebraischer Verband und $x \in V$. Dann gilt:

1. $x = x \curlywedge x$
2. $x = x \curlyvee x$

**Satz 7.5**

Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein algebraischer Verband. Definiert man eine binäre Relation $\preceq \subseteq V \times V$ durch:

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow_{df} \ x = x \curlywedge y,$$

so ist $(V, \preceq)$ ein ordnungsstruktureller Verband.

# Vollständige Verbände

## Definition 7.6

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt vollständiger Verband $\Leftrightarrow_{df}$
$\forall X \subseteq V.\ \inf(X)$ existiert $\wedge$ $\sup(X)$ existiert

## Beispiel 7.7

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ Verband: $\surd$, Vollständiger Verband: $\lightning$.

2. $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ mit $n \leq \infty$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ Vollständiger Verband$\surd$.

3. $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ Vollständiger Verband: $\surd$ (für jede Menge $M$).

# Vollständige Verbände

## Definition 7.6

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt vollständiger Verband $\Leftrightarrow_{df}$
$\forall X \subseteq V.\ \inf(X)$ existiert $\wedge$ $\sup(X)$ existiert

## Beispiel 7.7

4. $(\mathbb{N}, |)$ Vollständiger Verband: $\surd$ mit

$$\inf(X) = GgT(X) \quad \text{und} \quad \sup(X) = KgV(X)$$

Für unendliche Teilmengen $X$ bildet 0 das Supremum, da 0 von jeder Zahl geteilt wird.

5. $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ Vollständiger Verband: $\lightning$
(kein Supremum für $\sup(\mathbb{N}) = KgV(X)$).

# Vollständige Verbände

**Lemma 7.8** (Vollständiger Verband)

1. Sei $(V, \preceq)$ eine partielle Ordnung, in der Infima generell existieren, also
$$\forall X \subseteq V.\ \inf(X) \text{ existiert.}$$
Dann ist $(V, \preceq)$ vollständiger Verband, d.h. auch Suprema existieren generell, also
$$\forall X \subseteq V.\ \sup(X) \text{ existiert.}$$
2. Sei $(V, \preceq)$ eine partielle Ordnung, in der Suprema generell existieren, also
$$\forall X \subseteq V.\ \sup(X) \text{ existiert.}$$
Dann ist $(V, \preceq)$ vollständiger Verband, d.h. auch Infima existieren generell, also
$$\forall X \subseteq V.\ \inf(X) \text{ existiert.}$$

# Boolesche Verbände

**Definition 7.10** (Distributiver Verband)

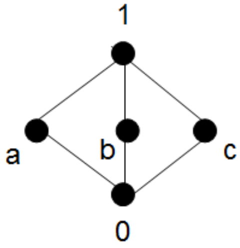
Ein algbraischer Verband $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ heißt distributiv, genau dann wenn für alle $x, y, z \in V$ gilt:

1. $x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$
2. $x \curlywedge (y \curlyvee z) = (x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z)$

**Lemma 7.11** (Distributiver Verband)

Die Bedingungen in der Definition sind äquivalent. Das heißt, eine der Eigenschaften stellt bereits sicher, dass ein distributiver Verband vorliegt.

# Boolesche Verbände




Nicht distributiv, denn

$$\begin{aligned} a \curlyvee (b \curlywedge c) &= a \curlyvee 0 = a \\ (a \curlyvee b) \curlywedge (a \curlyvee c) &= 1 \curlywedge 1 = 1. \end{aligned}$$

**Definition 7.12** (Boolescher Verband)

Ein distributiver algebraischer Verband $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ heißt Boolescher Verband, genau dann wenn es zwei verschiedene Elemente 0 und 1 in $V$ gibt und für jedes $x \in V$ ein komplementäres Element $\bar{x} \in V$ existiert, so dass gilt:

1. $x \curlyvee \bar{x} = 1$
2. $x \curlywedge \bar{x} = 0$

# Boolesche Verbände

**Satz 7.13** (Boolescher Verband)

Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ Boolescher Verband. Dann gilt für jedes $x, y \in V$:

1. $\bar{x}$ ist eindeutig bestimmt.
2. Neutralität:
   1. $x \curlyvee 0 = x$
   2. $x \curlywedge 1 = x$
3. Extremalgesetze:
   1. $x \curlyvee 1 = 1$
   2. $x \curlywedge 0 = 0$
4. Doppelkomplement: $\bar{\bar{x}} = 0$
5. De Morgansche Gesetze:
   1. $\overline{x \curlyvee y} = \bar{x} \curlywedge \bar{y}$
   2. $\overline{x \curlywedge y} = \bar{x} \curlyvee \bar{y}$

# Abstrakte Theoriebildung

$$
\begin{array}{rcl||rcl}
A \curlywedge B & = & B \curlywedge A & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \\
A \curlyvee B & = & B \curlyvee A & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \\
(A \curlywedge B) \curlywedge C & = & A \curlywedge (B \curlywedge C) & (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \\
(A \curlyvee B) \curlyvee C & = & A \curlyvee (B \curlyvee C) & (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \\
A \curlywedge (A \curlyvee B) & = & A & \mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} \\
A \curlyvee (A \curlywedge B) & = & A & \mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} \\
A \curlywedge (B \curlyvee C) & = & (A \curlywedge B) \curlyvee (A \curlywedge C) & \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \\
A \curlyvee (B \curlywedge C) & = & (A \curlyvee B) \curlywedge (A \curlyvee C) & \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \\
A \curlywedge \overline{A} & = & 0 & \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} & \equiv & \bot \\
A \curlyvee \overline{A} & = & 1 & \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} & \equiv & \top \\
A \curlywedge A & = & A & \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} \\
A \curlyvee A & = & A & \mathcal{A} \vee \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} \\
\overline{\overline{A}} & = & \mathrm{A} & \neg\neg\mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} \\
\overline{A \curlywedge B} & = & \overline{A} \curlyvee \overline{B} & \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B} \\
\overline{A \curlyvee B} & = & \overline{A} \curlywedge \overline{B} & \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \\
1 \curlywedge A & = & A & \top \wedge \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} \\
0 \curlyvee A & = & A & \bot \vee \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A}
\end{array}
$$

# Verbandskonstruktionen

**Satz 7.14** (Kartesisches Produkt zweier Verbände)

Seien $(V, \preceq_v)$ und $(W, \preceq_w)$ (vollständige) Verbände. Dann ist auch $(V \times W, \preceq_{vw})$ ein (vollständiger) Verband, wobei

$$(v, w) \preceq_{vw} (v', w') \text{ gdw. } v \preceq_v v' \text{ und } w \preceq_w w'$$

(Komponentenweise Ordnung)

Proof.

Zu zeigen:

1. $(V \times W, \preceq_{vw})$ ist eine partielle Ordnung
2. Infima und Suprema existieren.

(Details siehe Skript) □

# Verbandskonstruktionen

**Satz 7.14** (Kartesisches Produkt zweier Verbände)

Seien $(V, \preceq_v)$ und $(W, \preceq_w)$ (vollständige) Verbände. Dann ist auch $(V \times W, \preceq_{vw})$ ein (vollständiger) Verband, wobei

$$(v, w) \preceq_{vw} (v', w') \text{ gdw. } v \preceq_v v' \text{ und } w \preceq_w w'$$

(Komponentenweise Ordnung)

**Beispiel**

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \top \arrow[d, dash] \\ \bot \end{tikzcd} \quad \times \quad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \top \arrow[d, dash] \\ \bot \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=tiny] & (\top, \top) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (\bot, \top) \arrow[dr, dash] & & (\top, \bot) \arrow[dl, dash] \\ & (\bot, \bot) & \end{tikzcd}$$

# Verbandskonstruktionen

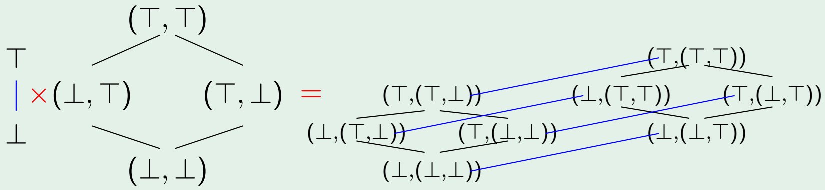
**Satz 7.14** (Kartesisches Produkt zweier Verbände)

Seien $(V, \preceq_v)$ und $(W, \preceq_w)$ (vollständige) Verbände. Dann ist auch $(V \times W, \preceq_{vw})$ ein (vollständiger) Verband, wobei

$$(v, w) \preceq_{vw} (v', w') \text{ gdw. } v \preceq_v v' \text{ und } w \preceq_w w'$$

(Komponentenweise Ordnung)

**Beispiel**



# Funktionenverband

**Satz 7.15**

Sei $M$ eine Menge und $V$ ein (vollständiger) Verband. Dann ist $(\{f \mid f : M \to V\}, \preceq)$ ein (vollständiger) Verband wobei

$$f \preceq g \text{ gdw. } \forall m \in M. f(m) \leq g(m)$$

# Verbandshomomorphismen

## Definition 7.16

Seien $(V, \preceq_v)$ und $(W, \preceq_w)$ Verbände. $f : V \to W$ heißt Verbandshomomorphismus gdw.

$$\forall v, v' \in V. v \preceq_v v' \Rightarrow f(v) \preceq_w f(v')$$

## Beispiel 7.17

- Sei $h_7 : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : h_7(n) = n \cdot 7$. Dann gilt:

$$n \leq n' \quad \Rightarrow \quad 7n \leq 7n' \quad \Rightarrow \quad h(n) \leq h(n')$$

- Sei $h_7' : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, |)$ mit $h_7'(n) = n \cdot 7$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n|m \quad &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}.\ n \cdot k = m \\ &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}.\ 7 \cdot (n \cdot k) = 7m \\ &\Rightarrow \quad h_7'(n) | h_7'(m) \end{aligned}$$

# Verbandshomomorphismen

## Definition 7.16

Seien $(V, \preceq_v)$ und $(W, \preceq_w)$ Verbände. $f : V \to W$ heißt Verbandshomomorphismus gdw.

$$\forall v, v' \in V. v \preceq_v v' \Rightarrow f(v) \preceq_w f(v')$$

## Beispiel 7.17

- Sei $s_7 : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ mit $s_7(n) = n + 7$. Dann gilt:

$$n \leq n' \quad \Rightarrow \quad 7 + n \leq 7 + n' \quad \Rightarrow \quad s_7(n) \leq s_7(n')$$

- Sei $s'_7 : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, |)$ mit $s'_7(n) = n + 7$. Dann gilt:

$$3|6 \quad \text{und} \quad s'_7(3) = 10 \text{ und } s'_7(6) = 13 \text{ aber } 10 \not| 13$$

# Kartesisches Produkt

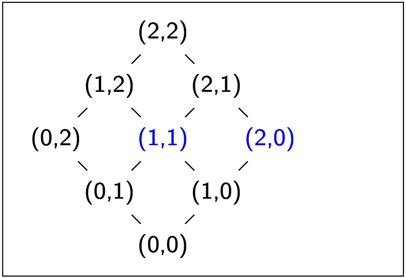
Seien $V = (\mathbb{N}, \leq)$ und $W = (\mathbb{N}, \leq)$ und $(V \times W, \preceq_{vw})$ gegeben mit:

$$(a, b) \preceq_{vw} (c, d) \text{ gdw. } (a \leq c) \wedge (b \leq d)$$

$$\begin{aligned}(a, b) \curlywedge (c, d) &= (min(a, c), min(b, d))\\ (a, b) \curlyvee (c, d) &= (max(a, c), max(b, d))\end{aligned}$$

Beispielsweise:

$$\begin{aligned}(1, 1) \curlywedge (2, 0) &= (1, 0)\\ (1, 1) \curlyvee (2, 0) &= (2, 1)\end{aligned}$$



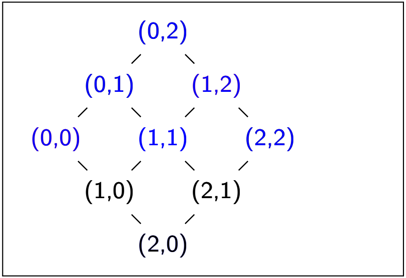
# Intervalle

Seien $V = (\mathbb{N}, \geq)$ und $W = (\mathbb{N}, \leq)$ und $(V \times W, \preceq_{\mathbb{I}})$ gegeben mit:

$$(a, b) \preceq_{\mathbb{I}} (c, d) \text{ gdw. } (a \geq c) \wedge (b \leq d)$$

$$\begin{aligned} (a, b) \curlywedge (c, d) &= (max(a, c), min(b, d)) \\ (a, b) \curlyvee (c, d) &= (min(a, c), max(b, d)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, 1) \curlywedge (2, 0) &= (2, 0) \\ (1, 1) \curlyvee (2, 0) &= (1, 1) \\ (0, 0) \curlywedge (1, 2) &= (1, 0) \\ (0, 0) \curlyvee (1, 2) &= (0, 2) \end{aligned}$$




Interessant für $\mathbb{R}$,$\mathbb{Q}$

# Verbandshomomorphismen

## Definition 7.18

Seien $(A, \curlyvee_A, \curlywedge_A)$ und $(B, \curlyvee_B, \curlywedge_B)$ algebraische Verbände und $f : A \to B$ eine Funktion.

1. $f$ heißt $\curlyvee$-Homomorphismus genau dann, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$f(a_1 \curlyvee_A a_2) = f(a_1) \curlyvee_B f(a_2).$$

2. $f$ heißt $\curlywedge$-Homomorphismus genau dann, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$f(a_1 \curlywedge_A a_2) = f(a_1) \curlywedge_B f(a_2).$$

# Verbandshomomorphismen

**Satz 7.19**

Seien $(A, \curlyvee_A, \curlywedge_A)$ und $(B, \curlyvee_B, \curlywedge_B)$ algebraische Verbände und $f : A \to B$ eine Funktion. Wir betrachten weiter die zugehörigen ordnungsstrukturellen Verbände $(A, \preceq_A)$ und $(B, \preceq_B)$. Dann gilt:

1. Falls $f$ ein $\curlyvee$-Homomorphismus ist, so ist $f$ ein Verbandshomomorphismus.
2. Falls $f$ ein $\curlywedge$-Homomorphismus ist, so ist $f$ ein Verbandshomomorphismus.

# Verbandshomomorphismen: Beispiel

Sei $f : (\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ mit $f(n, m) = n + m$. Dann gilt:

- $f$ ist Verbandshomomorphismus
- $f$ ist kein $\curlyvee$-Homomorphismus:

$f((1,4) \curlyvee_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (3,2)) = f((max(\{1,3\}), max(\{4,2\}))) = f((3,4)) = 7$
aber
$f((1,4)) \curlyvee_{\mathbb{N}} f((3,2)) = max(\{f((1,4)), f((3,2))\}) = max(\{5,5\}) = 5$

- $f$ ist kein $\curlywedge$-Homomorphismus:

$f((1,4) \curlywedge_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (3,2)) = f((min(\{1,3\}), min(\{4,2\}))) = f((1,2)) = 3$
aber
$f((1,4)) \curlywedge_{\mathbb{N}} f((3,2)) = min(\{f((1,4)), f((3,2))\}) = min(\{5,5\}) = 5$