6. Induktives Beweisen - Themenübersicht

Ordnungsrelationen

- Partielle Ordnungen
- Quasiordnungen
- Totale Ordnungen
- Striktordnungen
- Ordnungen und Teilstrukturen

Noethersche Induktion

- Anwendung: Terminierungsbeweise

Verallgemeinerte Induktion

- Anwendung: Fibonacci-Funktion

Strukturelle Induktion

- Anwendung: Boolesche Terme

Vollständige Induktion

- Anwendung: Gesetze natürlicher Zahlen

Partielle Ordnungen

Definition 6.1 (5.1)

Eine homogene Relation $\preceq \subseteq A \times A$ heisst *partielle Ordnung* oder auch *Halbordnung*, gdw.

1. $\preceq$ ist *reflexiv*: $\forall\, a \in A.\ a \preceq a$
2. $\preceq$ ist *antisymmetrisch*: $\forall\, a_1, a_2 \in A.\ a_1 \preceq a_2 \ \wedge\ a_2 \preceq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$
3. $\preceq$ ist *transitiv*: $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in A.\ a_1 \preceq a_2 \ \wedge\ a_2 \preceq a_3 \ \Rightarrow\ a_1 \preceq a_3$

Beispiele

- $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(M)$ für beliebige Grundmenge M.
- Teilbarkeitsbeziehung $|$ auf $\mathbb{N}$.
- Teilzeichenreihenbeziehung auf A^* definiert durch:

$$w' \sqsubseteq w \ \Leftrightarrow_{df}\ \exists\, w_1, w_2 \in A^*.\ w_1\, w'\, w_2 = w.$$

Partielle Ordnungen

Definition 6.2 (Ordnung auf $\mathbb{N}$) (5.2)

Für $n, m \in \mathbb{N}$ definiere wir eine Relation $\leq$ durch
$n \leq m \ \Leftrightarrow_{df} \ \exists\, k \in \mathbb{N}.\ n + k = m$.

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Später: $\leq$ ist total.

Partielle Ordnungen

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beweis (Reflexivität): Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ gilt dann $n + 0 = 0 + n = n$, also auch $n \leq n$.

Partielle Ordnungen

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beweis (Antisymmetrie (1/3)): Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ und $m \leq n$. Dann existieren Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit :

$$n + k_1 = m$$

$$m + k_2 = n$$

Setzt man m aus der ersten Gleichung in die Zweite ein, erhält man $(n + k_1) + k_2 = n$. Wegen der Assoziativität und Kommutativität der Addition folgt $(k_1 + k_2) + n = n$.

Partielle Ordnungen

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beweis (Antisymmetrie (2/3)): Gemäß der Definition der Addition natürlicher Zahlen (siehe Definition 4.2(a)) folgt daraus

$$(k_1 + k_2) + n = 0 + n$$

und weiter

$$k_1 + k_2 = 0$$

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die bereits $k_1 = 0$ impliziert.

Partielle Ordnungen

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beweis (Antisymmetrie (3/3)): Angenommen k_1 wäre von 0 verschieden. Dann gäbe es nach Lemma 4.1 eine natürliche Zahl k_1' mit $k_1' = \mathfrak{s}(k_1)$ und damit wegen der Definition der Addition natürlicher Zahlen auch mit:

$$k_1 + k_2 = \mathfrak{s}(k_1') + k_2 \overset{\text{Def.4.2.}(a)}{=} \mathfrak{s}(k_1' + k_2).$$

Also wäre $k_1 + k_2$ ein Nachfolger einer natürlichen Zahl und damit von 0 verschieden, im Widerspruch zu $k_1 + k_2 = 0$.

Partielle Ordnungen

Satz 6.3 (5.1)

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beweis (Transitivität: Seien $n, m, p \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ und $m \leq p$. Dann existieren Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit:

$$n + k_1 = m$$

$$m + k_2 = p$$

Setzt man m aus der ersten Gleichung in die Zweite ein, so erhält man $(n + k_1) + k_2 = p$. Mit der Assoziativität der Addition folgt

$$n + (k_1 + k_2) = p$$

und damit $n \leq p$.

Quasiordnungen

Definition 6.1

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heisst *Quasiordnung* oder auch *Präordnung*, gdw.

1. $\precsim$ ist *reflexiv*: $\forall\, a \in A.\ a \precsim a$
2. $\precsim$ ist *transitiv*: $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in A.\ a_1 \precsim a_2 \ \wedge \ a_2 \precsim a_3 \ \Rightarrow \ a_1 \precsim a_3$

Beispiel

- "Kleiner oder gleich groß"-Beziehung auf Menge von Personen.
- Teilbarkeitsbeziehung $\mid$ auf $\mathbb{Z}$ (Beachte $-1|1$ und $1|-1$).
- Implikation "$\Rightarrow$" auf Booleschen Termen.
- "Weniger mächtig"-Beziehung $\leq$ auf Mengensystemen.

Quasiordnungen

Beobachtung

- Quasiordnung $\precsim \subseteq A \times A$ induziert Äquivalenzrelation auf A durch:

$$a_1 \sim a_2 \ \Leftrightarrow_{df}\ a_1 \precsim a_2 \ \wedge \ a_2 \precsim a_1.$$

  Man spricht hier auch vom *Kern* der Quasiordnung.
- $\precsim$ bildet partielle Ordnung auf $A/\sim$.

Beispiel

- Implikation "$\Rightarrow$" auf Booleschen Termen ist Quasiordnung.
- Kern von "$\Rightarrow$" ist die semantische Äquivalenz auf Booleschen Termen.
- Implikation auf Klassen semantisch äquivalenter Boolescher Terme ist partielle Ordnung.

Totale Ordnungsrelationen

Definition

Eine Quasiordnung $\precsim \subseteq \mathcal{A} \times A$, in der alle Elemente vergleichbar sind, heißt *totale Quasiordnung* oder auch *Präferenzordnung*, d.h.

$$\forall\, a_1, a_2 \in A.\;\; a_1 \precsim a_2 \,\vee\, a_2 \precsim a_1$$

Beispiel

- "Weniger mächtig"-Beziehung $\leq$ auf Mengensystemen.

Totale Ordnungsrelationen

Definition

Eine partielle Ordnung $\preceq \subseteq \mathcal{A} \times A$, in der alle Elemente vergleichbar sind, heißt *totale Ordnung* oder auch *lineare Ordnung*, d.h.

$$\forall\, a_1, a_2 \in A.\ \ a_1 \preceq a_2 \ \vee\ a_2 \preceq a_1$$

Beispiel

- $\leq$ auf $\mathbb{N}$.
- Lexikographische Ordnung auf A*.

Striktordnungen

Beobachtung

Zu einer gegebenen Quasiordnung $\precsim$ lässt sich die zughörige *Striktordnung* $\prec$ definieren durch:

$$a_1 \prec a_2 \ \Leftrightarrow_{df} \ a_1 \precsim a_2 \wedge a_1 \not\sim a_2 .$$

Lemma 6.4 (5.1)

1. $\prec$ ist *asymmetrisch*, d.h.: $\forall\, a_1, a_2 \in A.\ a_1 \prec a_2 \ \Rightarrow \ a_2 \not\prec a_1$
2. $\prec$ ist *transitiv*, d.h.: $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in A.\ a_1 \prec a_2 \ \wedge \ a_2 \prec a_3 \ \Rightarrow \ a_1 \prec a_3$

Folgerung: $\prec$ ist *irreflexiv*, d.h.: $\forall\, a \in A.\ a \not\prec a$

Striktordnungen

Beobachtung

Zu einer gegebenen Striktordnung $\prec$ lässt sich die zughörige partielle Ordnung definieren durch:

$$a_1 \preceq a_2 \;\Leftrightarrow_{df}\; a_1 \prec a_2 \vee a_1 = a_2 \,.$$

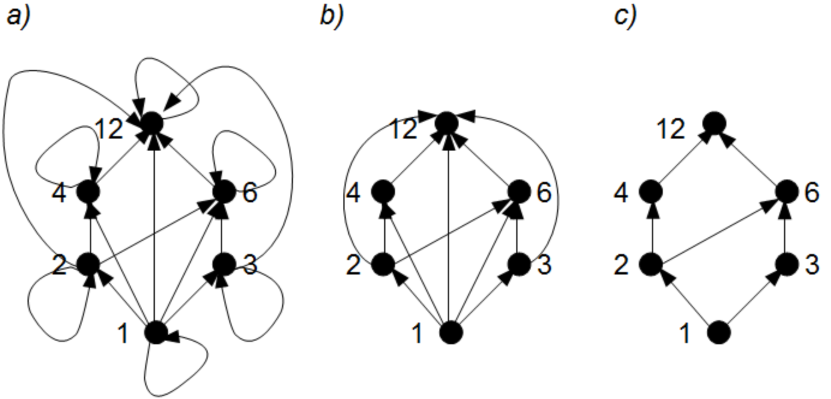
Definition

Reduziert man eine Striktordnung auf die unmittelbar benachbarten Abhängigkeiten erhält man die Nachbarschaftsordnung $\prec_N$ definiert durch:

$$a_1 \prec_N a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \prec a_2 \wedge \nexists\, a_3 \in A.\ a_1 \prec a_3 \prec a_2 \,.$$

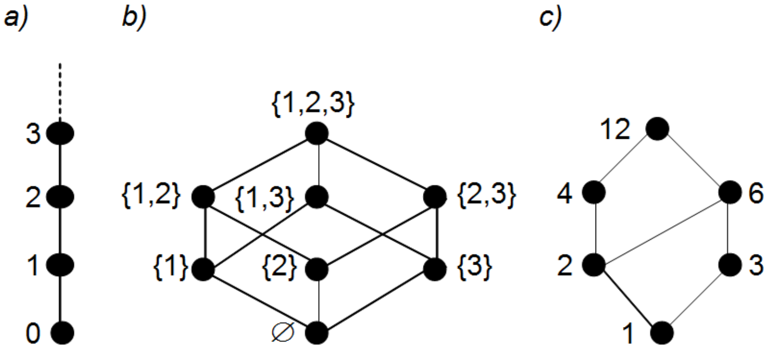
- Graphische Darstellung von $\prec_N$ als *Hasse-Diagramm* bekannt.
- Es gilt: $\prec_N^* = \preceq$

Teilbarkeitsordnungen



Teilbarkeitsordnungen auf $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ als (a) Partielle Ordnung (b) Striktordnung (c) Nachbarschaftsordnung

Hasse-Diagramme



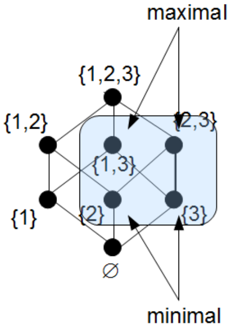
Hasse Diagramme zu (a) $\leq$ auf $\mathbb{N}$, (b) $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(\{1,2,3\})$, (c) $|$ auf $\{1,\ldots,12\}$.

Extremalelemente

Definition 6.5 (Minimale, maximale Elemente) (5.3)

Sei $\preceq \subseteq A \times A$ partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $b \in B$ heißt

1. *minimales* Element in $B \Leftrightarrow_{df} \nexists\, b' \in B.\ b' \prec b$ und
2. *maximales* Element in $B \Leftrightarrow_{df} \nexists\, b' \in B.\ b \prec b'$.

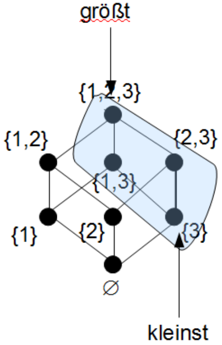


Extremalelemente

Definition 6.7 (Kleinstes, größtes Element) (5.4)

Sei $\preceq \subseteq A \times A$ partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $b \in B$ heißt

1. *kleinstes* Element in $B \Leftrightarrow_{df} \forall\, b' \in B.\ b \preceq b'$ und
2. *größtes* Element in $B \Leftrightarrow_{df} \forall\, b' \in B.\ b' \preceq b$.



Noethersche Ordnungen

Definition 6.9 (5.5)

Eine Quasiordnung $\precsim \subseteq A \times A$ heißt *Noethersch* genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein minimales Element besitzt.

Satz 5.2 (Absteigende Kettenbedingung)

Eine Quasiordnung $(M, \preceq)$ ist genau dann Noethersch, wenn es in M keine unendliche, echt absteigende Kette $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \ldots$ gibt.

Noethersche Ordnungen

Satz 5.2 (Absteigende Kettenbedingung)

Eine Quasiordnung $(M, \preceq)$ ist genau dann Noethersch, wenn es in M keine unendliche, echt absteigende Kette $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \ldots$ gibt.

Beweis "⇒": Sei $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \ldots$ eine unendliche, echt absteigende Kette in M. Dann ist $A =_{df} \{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$ nichleer. Angenommen nun es gäbe ein minimales Element $a_{min} \in A$. Dann existierte ein Index i mit $x_i = a_{min}$. Wegen $x_i \succ x_{i+1}$ wäre x_i aber im Widerspruch zur Annahme nicht minimal. Folglich gibt es kein minimales Element in A und M ist nicht Noethersch.

Noethersche Ordnungen

Beispiel 6.10 (5.3)

1. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist Noethersch, denn jede nichtleere Teilmenge enthält sogar ein kleinstes Element.
2. Die Teilzeichenreichenbeziehung $\sqsubseteq$ auf A^* ist Noethersch.
3. $\subseteq$ ist Noethersch auf $\mathfrak{P}(M)$ für jede endliche Grundmenge M.

Beispiel 6.11 (Nicht Noethersche Ordnungen) (5.4)

1. $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ ist nicht Noethersch, denn $\mathbb{Z}$ besitzt kein minimales Element.
2. $\leq$ auf $Q_{\geq 0}$ ist nicht Noethersch, denn $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ besitzt kein minimales Element.
3. $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist nicht Noethersch, denn $\{\mathbb{N}, \mathbb{N}\backslash\{0\}, \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \ldots\}$ besitzt kein minimales Element.

Noethersche Induktion

Beweisprinzip 6.12 (Noethersche Induktion)(7)

Sei $\precsim \subseteq M \times M$ eine Noethersche Quasiordnung. Lässt sich eine Aussage $\mathcal{A}$ über M für jedes $m \in M$ aus der Gültigkeit der Aussage für alle echt kleineren Elemente ableiten, dann ist sie für jedes $m \in M$ wahr.

$$\Big(\forall\, m \in M.\ (\forall\, m' \in M.\ m' \prec m \Rightarrow \mathcal{A}(m')) \Rightarrow \mathcal{A}(m)\Big) \Rightarrow \forall\, m \in M.\ \mathcal{A}(m).$$

Beweis: Per Kontraposition.
Falls $\forall\, m \in M.\ \mathcal{A}(m)$ nicht gilt, existiert nichtleere Menge $G \subseteq M$ von Gegenbeispielen.

$$G =_{df} \{g \in M \mid \neg\mathcal{A}(g)\}.$$

Weil $\precsim$ Noethersch ist, existiert ein minimales Gegenbeipiel $g_{min} \in G$.
g_{min} verletzt dann den Induktionsschluss.

Anwendung: Kommutativität der Addition

Satz 6.19(2)

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}.\ n + m \ = \ m + n.$$

Beweis durch Noethersche Induktion über komponentenweise Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(n, m) \leq (n', m') \ \Leftrightarrow_{df}\ \ n \leq n' \ \wedge\ m \leq m'.$$

Details: Skript.

Anwendung: Terminierung

Euklidischer Algorithmus

$$ggt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$ggt(n,m) = \begin{cases} n+m & \text{falls } n = 0 \text{ oder } m = 0 \\ ggt(n-m,m) & \text{falls } m < n \\ ggt(n,m-n) & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Terminierung: Noethersche Quasiordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n,m) \lesssim_{sum} (n',m') \;\Leftrightarrow_{df}\; n+m \leq n'+m'.$$

Anwendung: Terminierung

Ackermann-Funktion

$$ack : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$ack(n, m) \;=\; \begin{cases} m + 1 & \text{falls } n = 0 \\ ack(n-1, 1) & \text{falls } n > 0,\ m = 0 \\ ack(n-1, ack(n, m-1)) & \text{falls } n > 0,\ m > 0 \end{cases}$$

Terminierung: *Lexikographische Ordnung* (Noethersch und total) auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m) \leq_{lex} (n', m') \;\Leftrightarrow_{df}\; n < n' \;\vee\; (n = n' \;\wedge\; m \leq m').$$

Anwendung: Terminierung

Collatz-Funktion

$$col : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \{1\}$$

$$col(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ col(n/2) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ col(3n+1) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Terminierung: Keine geeignete Noethersche Ordnung bekannt.

Beweisprinzip Verallgemeinerte Induktion

Beweisprinzip 6.13 (Verallgemeinerte Induktion)(8)

Lässt sich eine Aussage über natürliche Zahlen für jede natürliche Zahl aus der Gültigkeit der Aussage für alle kleineren natürlichen Zahlen ableiten, dann ist sie für jede natürliche Zahl wahr.

$$\Big(\forall\, n \in \mathbb{N}.\ (\forall\, m \in \mathbb{N}.\ m < n \ \Rightarrow\ A(m)) \ \Rightarrow\ A(n)\Big) \ \Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N}.\ A(n).$$

Spezialfall der Noetherschen Induktion

Anwendung Fibonacci-Zahlen

Definition 6.14 (5.6)

$$\begin{array}{lll} fib(0) & =_{df} & 0 \\ fib(0) & =_{df} & 1 \\ fib(n+1) & =_{df} & fib(n) + fib(n-1) \end{array}$$

Es gilt: $\forall\, n \in \mathbb{N}.\ fib(n) < 2^n$.

Beweis:

- $n = 0$. Dann $fib(0) \overset{\text{Def.}}{=} 0 < 1 = 2^0$.
- $n = 1$. Dann $fib(1) \overset{\text{Def.}}{=} 1 < 2 = 2^1$.
- $n \geq 2$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} fib(n) \overset{\text{Def.}}{=} fib(n-2) + fib(n-1) & \overset{IA}{<} & 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ & \leq & 2^{n-1} + 2^{n-1} \ = \ 2 \cdot 2^{n-1} \ = \ 2^n. \end{array}$$

Strukturelle Induktion

Erinnerung: Induktiv strukturierte Mengen (Folie 119)

Definition 4.4

1. A eine Menge *elementarer* oder *atomarer* Bausteine und
2. O eine Menge von *Operatoren* (oder *Konstruktoren*) mit zugehörigen Stelligkeiten $k \geq 1$, die es erlauben, kleinere Bausteine zu grösseren Einheiten zusammenzusetzen.

Die durch A und O induktiv beschriebene Menge M ist die kleinste Menge, für die gilt:

1. $A \subseteq M$ und
2. Ist o ein Operator der Stelligkeit k und sind $m_1, \ldots, m_k \in M$, so ist auch $o(m_1, \ldots, m_k) \in M$.

Strukturelle Induktion

Gegeben:

- Induktiv strukturierte Menge M mit Atomen A und Konstruktoren O
- Eigenschaft $\mathcal{A}$ über M.

Ziel: Beweise, dass $\mathcal{A}(m)$ gilt für alle Elemente $m \in M$.

Vorgehen:

1. Man beweist, dass $\mathcal{A}$ für jedes Atom $a \in A$ gilt.
2. Man beweist für jeden Konstruktor $o \in O$, dass unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{A}$ für beliebige $m_1, \ldots, m_k \in M$ gilt, $\mathcal{A}$ auch für $o(m_1, \ldots, m_k)$ gilt.

Strukturelle Induktion

Beweisprinzip 6.15 (Strukturelle Induktion) (9)

Sei M induktiv strukturierte Menge (mit Atomen A, Konstruktoren O). Lässt sich eine Aussage $\mathcal{A}$ über M für jedes Atom $a \in A$ beweisen, und lässt sich für jeden Konstruktor $o \in O$ aus der Gültigkeit der Aussage für $m_1, \ldots, m_k \in M$ die Gültigkeit für $o(m_1, \ldots, m_k)$ ableiten, dann ist $\mathcal{A}$ für jedes $m \in M$ wahr.

$$\Big((\forall\, a \in A.\ \mathcal{A}(a)) \wedge \Big(\forall\, o \in O, m_1, \ldots, m_k \in M. \\ (\mathcal{A}(m_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}(m_k)) \Rightarrow \mathcal{A}\big(o(m_1, \ldots, m_k)\big)\Big)\Big) \\ \Rightarrow\ \forall\, m \in M.\ \mathcal{A}(m)$$

Strukturelle Induktion

.. als Spezialfall Noetherscher Induktion.

Nachbarschaftsordnung $\prec_N$ durch induktive "Bauanleitung" der Strukturen:

$$m_1 \prec_N m_2 \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \exists\, o \in O.\ m_2 = o(m'_1, \ldots, m'_k) \wedge m_1 \in \{m'_1, \ldots, m'_k\}.$$

"Ist-Teilstruktur"-Relation $\preceq$ als reflexiv-transitive Hülle von $\prec_N$, d.h: $\preceq\, = \prec_N^*$.

Klar: $\preceq$ ist Noethersch.

Anwendung: Aussagenlogik

Satz 6.16 (Funktionale Vollständigkeit von $\neg$*und*$\wedge$) (5.3)

Wir betrachten aussagenlogische Formeln (Definition 2.5, Folie 37), aufgefasst als induktiv beschriebene Menge aus den Atomen $a, b, c, \ldots$ (elementare Aussagen) sowie dem einstelligen Konstruktor $\neg$ und den zweistelligen Konstruktoren $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Zu jeder aussagenlogischen Formel ϕ existiert eine semantisch äquivalente Formel ϕ', so dass ϕ' lediglich die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ enthält.

Anwendung: Aussagenlogik

Beweis: (Strukturelle Induktion)

Über den induktiven Aufbau von ϕ:

Fall 1: $\phi = a$. Trivial, denn ϕ enthält keine Junktoren.

Fall 2: $\phi = \neg\psi$. Nach der Induktionsannahme (IA) existiert Formel $\psi' \equiv \psi$, so dass ψ' nur $\neg$ und $\wedge$ enthält. Dies gilt dann auch für $\phi' = \neg\psi'$, und es gilt $\phi' \equiv \phi$.

Fall 3: $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Dann existieren nach der IA $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ mit der gewünschten Eigenschaft, und $\phi' = \psi_1' \wedge \psi_2' \equiv \phi$ enthält ebenfalls nur $\neg$ und $\wedge$.

Fall 4: $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$. Dann existieren nach der IA $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ mit der gewünschten Eigenschaft, und $\phi' = \neg(\neg\psi_1' \wedge \neg\psi_2') \equiv \phi$ enthält ebenfalls nur $\neg$ und $\wedge$.

Anwendung: Aussagenlogik

Beweis: (Strukturelle Induktion)

Über den induktiven Aufbau von ϕ:

Fall 5: $\phi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$. Dann existieren nach der IA $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ mit der gewünschten Eigenschaft, und $\phi' = \neg(\psi_1' \wedge \neg\psi_2') \equiv \phi$[a] enthält ebenfalls nur $\neg$ und $\wedge$.

Fall 6: $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. Dann existieren nach der IA $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ mit der gewünschten Eigenschaft, und $\phi' = \neg(\neg(\psi_1' \wedge \psi_2') \wedge \neg(\neg\psi_1' \wedge \neg\psi_2')) \equiv \phi$[b] enthält ebenfalls nur $\neg$ und $\wedge$.

---

[a] Aufgrund der Äquivalenz $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ und der deMorganschen Regeln.

[b] Aufgrund der Äquivalenz $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ und der deMorganschen Regeln.

Anwendung: Boolesche Terme

Satz 6.13 (Kompositionalität von $[\![\cdot]\!]_B$)(Kap. 5.7.2, 5.7.3)

Seien $t, t', t'' \in \mathcal{BT}$ mit $t' \equiv t''$. Dann gilt

$$t[t'/x] \equiv t[t''/x],$$

dass heißt man darf (simultan) Gleiches durch (semantisch) Gleiches ersetzen.

Beweisprinzip: Vollständige Induktion

Beweisprinzip 6.18 (Vollständige Induktion)(10)

Ist eine Aussage A über natürliche Zahlen für 0 wahr und lässt sich ihre Gültigkeit für jede größere natürliche Zahl aus der Gültigkeit der Aussage für ihren Vorgänger ableiten, dann ist sie für jede natürliche Zahl wahr.

$$\big(\, A(0) \;\wedge\; \forall\, n \in \mathbb{N}.\; A(n) \;\Rightarrow\; A(n+1) \,\big) \;\Rightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N}.\; A(n).$$

Vollständige Induktion

Satz 6.15 (5.4)

Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

Assoziativität:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & (n+m)+k & = & n+(m+k) \\ 2) & (n \cdot m) \cdot k & = & n \cdot (m \cdot k) \end{array}$$

Kommutativität:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & n+m & = & m+n \\ 2) & n \cdot m & = & m \cdot n \end{array}$$

Neutrale Elemente:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & n+0 & = & n \\ 2) & n \cdot 1 & = & n \end{array}$$

Distributivität:

$$(n+m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$$

Beispiele

Beispiel 6.16 (5.5)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. Es gibt 2^n Teilmengen von n–elementigen Mengen.
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$, Summe der ersten n natürlichen Zahlen.
3. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$, Summe der ersten n ungeraden Zahlen.