4. Induktives Definieren - Themenübersicht

Induktives Definieren

- Natürliche Zahlen
- Operationen auf natürlichen Zahlen
- Induktive Algorithmen

Induktiv definierte Mengen

- Binärbäume
- Boolesche Terme
- Syntaktische Substitution

Natürliche Zahlen

Definition 4.1 (Peano-Axiome) (4.1)

P1 0 ist eine natürliche Zahl: $0 \in \mathbb{N}$.

P2 Jede natürliche Zahl n besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $\mathfrak{s}(n)$ als Nachfolger:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \exists\, m \in \mathbb{N}.\ m = \mathfrak{s}(n)$$

P3 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl:

$$\nexists\, n \in \mathbb{N}.\ 0 = \mathfrak{s}(n)$$

P4 Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}.\ n \neq m \ \Rightarrow\ \mathfrak{s}(n) \neq \mathfrak{s}(m)$$

P5 *Induktionsaxiom*: Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und der Eigenschaft, dass aus $n \in M$ auch $\mathfrak{s}(n) \in M$ folgt, so muss $M = \mathbb{N}$ gelten.

Existenz und Eindeutigkeit des Vorgängers

Lemma 4.1

Jede von 0 verschiedene natürliche Zahl n ist Nachfolger einer eindeutig bestimmten anderen natürlichen Zahl. Diese wird auch als *Vorgänger* von n bezeichnet.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ von 0 verschieden. Zunächst zeigen wir, dass n Nachfolger einer natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist bzw. in der Menge M' liegt, die definiert ist durch:

$$M' =_{df} \{\mathfrak{s}(m) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Sei weiter $M \Leftrightarrow_{df} M' \cup \{0\}$. Wegen (P2) impliziert $m \in M$ auch $\mathfrak{s}(m) \in M$. Damit liegen die Voraussetzungen des Induktionsaktioms (P5) vor und es folgt $M = \mathbb{N}$. Wegen (P3) gilt außerdem $M' = \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Somit gilt $n \in M'$. Die Eindeutigkeit des Vorgängers folgt direkt aus Axiom (P4).

Operationen auf natürlichen Zahlen

Definition 4.2 (Addition natürlicher Zahlen) (4.2)

Die Addition zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} 0 + m &=_{df} m \\ \mathfrak{s}(n) + m &=_{df} \mathfrak{s}(n + m) \end{aligned}$$

Definition 4.3 (Multiplikation natürlicher Zahlen) (4.2)

Die Multiplikation zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} 0 \cdot m &=_{df} 0 \\ \mathfrak{s}(n) \cdot m &=_{df} m + (n \cdot m) \end{aligned}$$

Beispiele

Addition von 2 und 1

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0)) + \mathfrak{s}(0) &\overset{(b)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0) + \mathfrak{s}(0)) \\ &\overset{(b)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0 + \mathfrak{s}(0))) \\ &\overset{(a)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) \end{aligned}$$

Multiplikation von 2 und 3

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0)) \cdot \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) &\overset{(d)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) + (\mathfrak{s}(0) \cdot \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0)))) \\ &\overset{(d)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) + (\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) + (0 \cdot \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))))) \\ &\overset{(c)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) + (\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) + 0) \\ &\vdots \\ &\overset{(a)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0)))))) \end{aligned}$$

Operationen auf natürlichen Zahlen

Definition (Induktiv fortgesetzte Summen und Produkte)

$$\sum_{i=1}^{k} n_i =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ (\sum_{i=1}^{k-1} n_i) + n_k & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{k} n_i =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \\ (\prod_{i=1}^{k-1} n_i) \cdot n_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Operationen auf natürlichen Zahlen

Definition 4.1 (Fakultät und Potenzen) (Beispiel 4.1)

$$n! \quad =_{df} \quad \prod_{i=1}^{n} i = (\ldots(1 \cdot 2)\ldots) \cdot n)$$

$$m^n \quad =_{df} \quad \prod_{i=1}^{n} m = \underbrace{(\ldots(m \cdot m)\ldots) \cdot m)}_{n \text{ mal}}.$$

Operationen auf natürlichen Zahlen

Lemma 4.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = \mathfrak{s}(n)$.

Beweis (1/2)

Wir definieren die zu der obigen Gleichheit gehörige Menge M durch:

$$M =_{df} \{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 = \mathfrak{s}(n)\}.$$

Offensichtlich gilt $0 \in M$, denn:

$$0 + 1 = 0 + \mathfrak{s}(0) \overset{(Def.\ 4.2.a)}{=} \mathfrak{s}(0).$$

Operationen auf natürlichen Zahlen

Lemma 4.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = \mathfrak{s}(n)$.

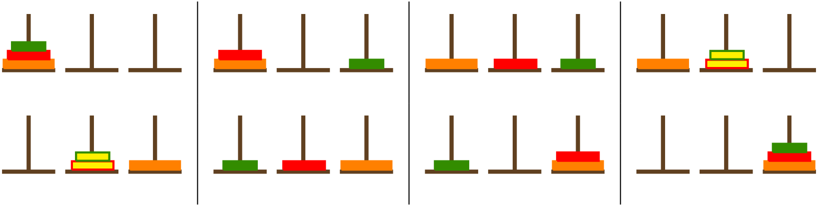
Beweis (2/2)

Für $n \in M$ folgt weiter auch $\mathfrak{s}(n) \in M$, denn:

$$\mathfrak{s}(n) + 1 \overset{(Def.\ 4.2.b)}{=} \mathfrak{s}(n + 1) \overset{(n \in M)}{=} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(n)).$$

Also folgt $M = \mathbb{N}$ mit dem Induktionsaxiom (P5), womit die Aussage bewiesen ist.

Türme von Hanoi



- Für $n = 0$ ist nichts zu tun.
- Für $n > 0$
  - Verschiebe $n - 1$ Scheiben von Stapel A nach B, wobei C als Hilfsstapel dient.
  - Verschiebe die n-te Scheibe von Stapel A nach C.
  - Verschiebe $n - 1$ Scheiben von Stapel B nach C, wobei A als Hilfsstapel dient.

Induktiv strukturierte Mengen

Definition 4.4 (4.4)

Sei

1. A eine Menge *elementarer* oder *atomarer* Bausteine und
2. O eine Menge von *Operatoren* (oder *Konstruktoren*) mit zugehörigen Stelligkeiten $k \geq 1$, die es erlauben, kleinere Bausteine zu grösseren Einheiten zusammenzusetzen.

Die durch A und O induktiv beschriebene Menge M ist die kleinste Menge, für die gilt:

1. $A \subseteq M$ und
2. Ist o ein Operator der Stelligkeit k und sind $m_1, \ldots, m_k \in M$, so ist auch $o(m_1, \ldots, m_k) \in M$.

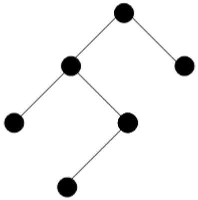
Induktiv strukturierte Mengen: Binäre Bäume

Beispiel 4.5 (4.2)

Binäre Bäume sind die kleinste Menge mit

1. Der *leere Binärbaum* $-$ ist ein atomarer Binärbaum und
2. Falls T_1 und T_2 Binärbaume sind, so ist auch $[T_1, T_2]$ ein Binärbaum. T_1 ist linker und T_2 rechter Teilbaum von diesem.

$$[[[-,-],[[-,-],-]],[-,-]] \quad \simeq$$



Induktiv strukturierte Mengen: Boolesche Terme

Definition 4.6 (4.5)

Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von Booleschen Variablen, z.B. $\mathcal{V} = \{X, Y, Z, ...\}$. Die Menge $\mathcal{BT}$ aller *Booleschen Terme* über $\mathcal{V}$ ist die kleinste Menge mit:

1. T, F und Boolesche Variable aus $\mathcal{V}$ sind atomare Boolesche Terme.
2. Sind t_1 und t_2 Boolesche Terme, so sind auch
   - $\neg t_1$, die *Negation* von t_1,
   - $(\, t_1 \wedge t_2 \,)$, die *Konjunktion* von t_1 und t_2 und
   - $(\, t_1 \vee t_2 \,)$, die *Disjunktion* von t_1 und t_2

   Boolesche Terme.

Syntaktische Substitution

Definition 4.7 (4.6)

Die Substitution ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \mathcal{BT} \times \mathcal{BT} \times \mathcal{V} \;\to\; \mathcal{BT}.$$

$t_1[t_2/X]$ *intuitiv*: Der Term, der entsteht, wenn in t_1 die Variable X an allen Stellen durch den Term t_2 ersetzt wird.

Syntaktische Substitution

Definition 4.7

Die Substitution ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \mathcal{BT} \times \mathcal{BT} \times \mathcal{V} \ \to \ \mathcal{BT}.$$

$t_1[t_2/X]$ *formal*: Induktiv über den Aufbau von t_1

- $\mathsf{T}[t/X] =_{df} \mathsf{T}$
- $\mathsf{F}[t/X] =_{df} \mathsf{F}$
- $Y[t/x] =_{df} \begin{cases} t & \text{falls } Y = X \\ Y & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\neg t_1)[t/x] =_{df} \neg(t_1[t/x])$
- $(t_1 \wedge t_2)[t/x] =_{df} (t_1[t/x] \wedge t_2[t/x])$
- $(t_1 \vee t_2)[t/x] =_{df} (t_1[t/x] \vee t_2[t/x])$

Syntaktische Substitution

Beispiel 4.8 (4.3)

$$\begin{aligned} \neg(Y \land X)[t/X] &= \neg((Y \land X)[t/X]) \\ &= \neg(Y[t/X] \land X[t/X]) \\ &= \neg(Y \land X[t/X]) \\ &= \neg(Y \land t) \end{aligned}$$

5. Darstellung und deren Bedeutung - Übersicht

Darstellung und deren Bedeutung

- Zeichreihen
- Semantikschemata
- Backus-Naur-Form
- Induktive Semantikschemata

Repräsentation

Repräsentanten der natürlichen Zahl "'vier"':

- Dezimal: 4
- Binär: 100
- Unär: ||||
- Römisch: IV

Umgekehrt: Unterschiedliche Interpretation der Repräsentation "'IV"':

- Römische Zahl
- Akronym (Individualverkehr, Intravenös,..)

Zeichenreihen

Definition 5.1 (4.7)

Sei A eine endliche Menge von Zeichen (auch *Alphabet* genannt). Eine Zeichenreihe (auch *Wort*) w der Länge $n \in \mathbb{N}$ über A ist eine Funktion $w : \{1, \ldots, n\} \to A$. Für $n = 0$ ist $\{1, \ldots, n\}$ leer. Man bezeichnet die Zeichenreihe als das *leere Wort* ϵ.

Die Menge aller Zeichenreihen über A mit Länge n wird mit A^n bezeichnet ($A^0 = \{\epsilon\}$).

Kleenesche Hülle A^* von A:

$$A^* =_{df} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.$$

Zeichenreihen

Definition 5.2 (4.8)

Seien w_1 und w_2 Zeichenreihen der Länge n und m über A. Dann ist die *Konkatenation* von w_1 und w_2 definiert durch:

$$w_1\, w_2 : \{1, \ldots, n+m\} \to A$$

$$w_1\, w_2(i) = \begin{cases} w_1(i) & \text{falls } 1 \leq i \leq n \\ w_2(i-n) & \text{falls } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

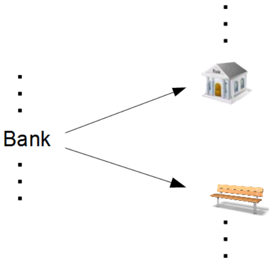
Semantikschemata

Definition 5.3 (4.9)

Ein *Semantikschema* ist ein Tripel $(\mathcal{R}, \mathcal{I}, [\![\ \cdot\ ]\!])$ mit

- $\mathcal{R}$: Menge der *Repräsentationen*,
- $\mathcal{I}$: Menge der *Informationen*,
- $[\![\ \cdot\ ]\!] \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{I}$: *Semantikrelation* oder *Interpretation*.

  Statt $[\![\ \cdot\ ]\!](r)$ schreibt man $[\![\ r\ ]\!]$.



Unärdarstellung natürlicher Zahlen

Beispiel 5.4 (4.4)

- $\mathcal{R}_u =_{df} \{|\}^+ = \{|, ||, |||, \ldots\}$,
- $\mathcal{I}_u =_{df} \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$,
- $[\![\cdot]\!]_u$ ist definiert durch $[\![\underbrace{|| \ldots |}_{n}]\!]_u =_{df} n$.

Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen

Beispiel 5.5 (4.5)

- $\mathcal{R}_d =_{df} \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{9}\}^+$,
- $\mathcal{I}_d =_{df} \mathbb{N} =_{df} \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- $[\![\cdot]\!]_d$ ist definiert durch

$$[\![w]\!]_d =_{df} \sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} \cdot [\![w(i)]\!]_z$$

Dabei bezeichnet $[\![\cdot]\!]_z$ den Wert einer Dezimalziffer, also $[\![\mathbf{0}]\!]_z =_{df} 0, \ldots, [\![\mathbf{9}]\!]_z =_{df} 9$.

Binärdarstellung natürlicher Zahlen

Beispiel 5.6 (4.6)

- $\mathcal{R}_b =_{df} \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{1}\, w \mid w \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^*\}$
- $\mathcal{I}_b =_{df} \mathbb{N}$
- $[\![\, \cdot \,]\!]_b$ ist definiert durch

$$[\![\, w \,]\!]_b =_{df} \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot [\![\, w(i) \,]\!]_{bz}$$

Dabei bezeichnet $[\![\, \cdot \,]\!]_{bz}$ den Wert einer Binärziffer, also $[\![\, \mathbf{0} \,]\!]_{bz} =_{df} 0$ und $[\![\, \mathbf{1} \,]\!]_{bz} =_{df} 1$.

Binärdarstellung endl. Mengen natürlicher Zahlen

Beispiel 5.7 (4.7)

- $\mathcal{R}_{bs} =_{df} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^+$,
- $\mathcal{I}_{bs} =_{df} \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und
- $[\![\cdot]\!]_{bs}$ ist definiert durch

$$[\![w]\!]_{bs} = \{|w| - i \mid i \in \{1, \ldots, |w|\} \wedge w(i) = 1\}.$$

Backus-Naur-Form

Definition (BNF)

- BNF besteht aus endlich vielen Regeln der Form

$$<N> \ ::= w.$$

- Linke Regelseite: *Nichtterminalsymbol*
- Rechte Regelseite: Zeichenreihe (ggf. auch leer), die sowohl Nichtteminalsymbole als auch Terminalsymbole enthalten kann.

Notation: Statt

$$\begin{array}{lcl} <N> & ::= & w_1 \\ & \dots & \\ <N> & ::= & w_n \end{array}$$

schreibt man kurz

$$<N> \ ::= w_1 \mid \dots \mid w_n$$

Beispiel zur Backus-Naur-Form

Beispiel 5.8 (BNF für natürliche Zahlen)

Die natürlichen Zahlen sind durch die folgende BNF definiert:

$$<\mathit{Nat}> \quad ::= \quad 0 \mid \mathfrak{s}(<\mathit{Nat}>)$$

BNF als Generator

Definition (Ableitungsrelation)

Seien **T** die Terminalzeichen, **N** die Nichtterminalzeichen und **R** die Regeln einer BNF, so ist die *Ableitungsrelation* $\Rightarrow \subseteq (\mathbf{N} \cup \mathbf{T})^* \times (\mathbf{N} \cup \mathbf{T})^*$ wie folgt definiert:

$$w \;\Rightarrow\; w' \;\Leftrightarrow_{df}$$
$$\exists\, w_1, w_2 \in (\mathbf{N} \cup \mathbf{T})^*,\; A \;::=\; \tilde{w} \in \mathbf{R}.\; w \;=\; w_1\, A\, w_2 \;\wedge\; w' \;=\; w_1\, \tilde{w}\, w_2$$

$\Rightarrow^k$: *Ableitungsfolge* in k Schritten ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow^* =_{df} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow^k$: Beliebige Ableitungsfolge

Von Nichtterminal A erzeugte *Sprache*:

$$L(A) \;=_{df} \{w \in \mathbf{T}^* \mid A \Rightarrow^* w\}.$$

BNF als Generator

Beispiel (Ableitungsfolge)

$$\begin{aligned} <\!\mathit{Nat}\!> \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{s}(<\!\mathit{Nat}\!>) \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(<\!\mathit{Nat}\!>)) \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(<\!\mathit{Nat}\!>))) \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(0))) \end{aligned}$$

Beispiele zur Backus-Naur-Form

Beispiel 5.9 (BNF für Dezimalzahlen) (4.9)

$$\begin{aligned} {<}DezimalZahl{>} &::= {<}DezimalZahl{>}{<}Ziffer{>} \mid {<}Ziffer{>} \\ {<}Ziffer{>} &::= 0|\ldots|9 \end{aligned}$$

Beispiel 5.10 (BNF für Boolesche Terme) (4.10)

${<}BT{>}{::=}\ \mathsf{T}|\mathsf{F}|\ {<}V{>} \mid \neg\, {<}BT{>} \ \mid (\, {<}BT{>} \wedge {<}BT{>}\,) \mid (\, {<}BT{>} \vee {<}BT{>}\,)$

${<}V{>}{::=}\ X_0 \mid X_1 \mid \ \ldots$

Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen

Beispiel 5.11 (4.11)

- $\mathcal{R}_d =_{df} \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{9}\}^+$,
- $\mathcal{I}_d =_{df} \mathbb{N} =_{df} \{0, 1, 2, \ldots\}$: Natürliche Zahlen (als Informationen, nicht als ihre Notation im Dezimalsystem!) und
- $[\![\cdot]\!]_d$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} [\![z]\!]_d &=_{df} [\![z]\!]_z \\ [\![w\, z]\!]_d &=_{df} 10 \cdot [\![w]\!]_d + [\![z]\!]_d \end{aligned}$$

Induktive Semantikschemata

Definition 5.12 (Semantikfunktion (1/2)) (4.10)

Die *Semantikfunktion* für Boolesche Terme ist eine Funktion

$$[\![\,\cdot\,]\!] : \mathcal{BT} \;\rightarrow\; (\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \;\rightarrow\; \{w, f\}),$$

die einem Booleschen Term unter Zuhilfenahme einer Belegung einen Wahrheitswert zuordnet. Sie ist wie folgt induktiv definiert:

- $[\![\,\mathsf{T}\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; w$
- $[\![\,\mathsf{F}\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; f$
- $[\![\,X\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; \beta(X)$ für alle $X \in \mathcal{V}$
- $[\![\,(\neg t_1)\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; \dot{\neg}([\![\,t_1\,]\!]_B(\beta))$
- $[\![\,(t_1 \,\wedge\, t_2)\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; ([\![\,t_1\,]\!]_B(\beta) \,\dot{\wedge}\, [\![\,t_2\,]\!]_B(\beta))$
- $[\![\,(t_1 \,\vee\, t_2)\,]\!]_B(\beta) \;=_{df}\; ([\![\,t_1\,]\!]_B(\beta) \,\dot{\vee}\, [\![\,t_2\,]\!]_B(\beta))$

Induktive Semantikschemata

Definition 5.12 (Semantikfunktion (2/2)) (4.10)

Dabei sind $\dot{\neg}$, $\dot{\wedge}$, $\dot{\vee}$ semantische Operationen auf den Wahrheitswerten $\{w, f\}$, die durch folgende Wahrheitstafel beschrieben sind:

b_1	b_2	$\dot{\neg} b_1$	$b_1 \dot{\vee} b_2$	$b_1 \dot{\wedge} b_2$
f	f	w	f	f
f	w	w	w	f
w	f	f	w	f
w	w	f	w	w