8. Algebraische Strukturen - Themenübersicht

Mengen mit einer Operation

- Halbgruppen
- Monoide
- Gruppen

Mengen mit zwei Operationen

- Körper
- Ringe

Strukturerhaltende Abbildungen

Halbgruppen

Definition 8.1

Eine Menge G mit Verknüpfung $\oplus : G \times G \to G$ heißt Halbgruppe g.d.w. sich $\oplus$ auf G assoziativ verhält:

$$\forall a, b, c \in G : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Beispiel

Halbgruppe?

- $\langle \mathbb{Z}, - \rangle$ Nein, da $(-3 - 4) - 5 \neq -3 - (4 - 5)$.
- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ Ja, Addition in $\mathbb{Z}$ assoziativ.
- $\langle A^+, \cdot \rangle$ Ja, Konkatenation ist assoziativ.

Eindeutigkeit von neutralen Elementen

Definition (Neutrales Element)

Sei G mit $\oplus$ eine Halbgruppe. Ein Element $e \in G$ heißt neutrales Element g.d.w. für alle $a \in G$

$$a \oplus e = e \oplus a = a.$$

Lemma 8.2

Neutrale Elemente in einer Halbgruppe sind eindeutig bestimmt.

Proof.

Seien e, e' neutrale Elemente. Dann gilt:

$$e = e \oplus e' = e'$$

□

Monoid

Definition

Eine Halbgruppe, die ein neutrales Element besitzt, heißt Monoid.

Beispiel 8.3

Monoid?

- $\langle A^+, \cdot\rangle$ Nein, $\varepsilon \notin A^+$.
- $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ Ja, $0 \in \mathbb{Z}$.
- $\langle A^*, \cdot\rangle$ Ja, $\varepsilon \in A^*$ neutrales Element ($A^* =_{df} A^+ \cup \{\varepsilon\}$).
- $\langle A^A, \circ\rangle$ (Funktionen $f : A \to A$,Komposition) Ja, identische Abbildung id_M ist neutrales Element.

Gruppen

Definition 8.4 (Inverses Element)

Sei G mit $\oplus$ ein Monoid und $a \in G$. Ein Element $a^{-1} \in G$ mit

$$a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$$

heißt inverses Element zu a.

Definition 8.5 (Gruppe)

Ein Monoid, bei dem zu jedem Element $a \in G$ ein inverses Element $a^{-1} \in G$ existiert, heißt Gruppe.

Gruppen: Beispiele

Beispiel 8.6

Gruppen?

- $\langle \mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot \rangle$ Ja, mit neutralem Element 1 und inversem Element x^{-1} zu x.
- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ Ja, mit neutralem Element 0 und inversem Element $-x$ zu x.
- $\langle \mathbb{R}^{-}, \cdot \rangle$ Nein, aufgrund fehlender Abgeschlossenheit.
- $\langle A^{+}, \cdot \rangle$ Nein, da Elemente in A^{+} keine inversen Elemente besitzen.
- $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ Nein, da Elemente in $\mathbb{Z}$ i.A. keine inversen Elemente besitzen.
- $\langle \{-1, 1\}, \cdot \rangle$ Ja, da alle Eigenschaften erfüllt.

Strukturtafeln

$+_n$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	$\ddots$			
3	3	4				
4	4	5				
5	5	0				

$*_n$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	$\ddots$			
3	0	3				
4	0	4				
5	0	5				

Figure : Additions- und Multiplikationstafeln für $\mathbb{Z}_6$

Rechenregeln in Gruppen

Lemma 8.8

Sei G mit $\oplus$ eine Gruppe. Dann gilt:

1. $\forall a, b, c \in G. a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$,
2. $\forall a, b \in G. (a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$

Proof.

1. Wir folgern die Konklusion unter Anwendung der Prämisse:

$$\begin{aligned} a &\overset{(Neu.)}{=} a \oplus e \overset{(Def.\ Inv.)}{=} a \oplus (b \oplus b^{-1}) \\ &\overset{(Assoz.)}{=} (a \oplus b) \oplus b^{-1} \overset{(Vor.)}{=} (c \oplus b) \oplus b^{-1} \\ &\overset{(Assoz.)}{=} c \oplus (b \oplus b^{-1}) \overset{(Def.\ Inv.)}{=} c \oplus e \\ &\overset{(Neu.)}{=} c \end{aligned}$$

Rechenregeln in Gruppen

Lemma 8.8

Sei G mit $\oplus$ eine Gruppe. Dann gilt:

1. $\forall a, b, c \in G . a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$,
2. $\forall a, b \in G . (a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$

Proof.

2. Übungen

$\square$

Untergruppen

Definition 8.9

Ist $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe und $H \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G, so dass $\langle H, \oplus \rangle$ auch eine Gruppe ist, so nennen wir $\langle H, \oplus \rangle$ Untergruppe von $\langle G, \oplus \rangle$.

- Analog für Halbgruppen und Monoide
- Unterstrukturen müssen insbesondere mit der gleichen Operation definiert sein, so ist z.B. die Gruppe $\langle \mathbb{Z}, - \rangle$ keine Untergruppe der Gruppe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, obwohl $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Beispiel 8.10

Die Gruppe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ hat als Untergruppe $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Neutrale Elemente in Untergruppen

Beispiel 8.11

Bei einem Monoid mit Untermonoid müssen die neutralen Elemente nicht die gleichen sein. Gegeben sei das Monoid $\langle G, \oplus \rangle$ gemäß der folgenden Verknüpfungstabelle:

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\langle G, \oplus \rangle$ besitzt als neutrales Element a. Das Untermonoid $\langle \{b\}, \oplus \rangle$ hat jedoch neutrales Element b.

Satz 8.12

Eine Untergruppe $\langle H, \oplus \rangle$ von $\langle G, \oplus \rangle$ besitzt das gleiche neutrale Elemente wie $\langle G, \oplus \rangle$.

Symmetrische Gruppe

Definition 8.13

$S_n = \{f \mid f \text{ ist Bijektion von } \{1,\ldots,n\} \text{ auf } \{1,\ldots,n\}\}$ mit der Komposition bildet die symmetrische Gruppe. Die Elemente in S_n können als Permutation angesehen werden.

$$
\begin{aligned}
S_3 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Symmetrische Gruppe

Die Komposition ist von rechts nach links zu lesen, d.h. für $f \circ g$ wendet man zuerst die Permutation g und dann f an.

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zyklenschreibweise: $f = (1,3)$, $g = (1,2)$ und $f \circ g = (1,2,3)$.
Dabei steht $(c_1, c_2, c_3 \ldots, c_{k-1}, c_k)$ für $c_1 \mapsto c_2$, $c_2 \mapsto c_3$,…,$c_{k-1} \mapsto c_k$, $c_k \mapsto c_1$. Kommt ein c_i nicht vor so bedeutet dies, dass $c_i \mapsto c_i$.

$$S_3 = \{(), (23), (12), (123), (132), (13)\}$$

Nebenklassen

Definition 8.14

Sei $\langle H, \oplus \rangle$ eine Untergruppe von $\langle G, \oplus \rangle$ und $a \in G$. Dann bezeichne

$$\begin{aligned} aH &=_{df} \{a \oplus h \mid h \in H\} \\ Ha &=_{df} \{h \oplus a \mid h \in H\} \end{aligned}$$

die Links- und Rechtsnebenklassen von a.

Beispiel 8.15

Betrachten wir die Untergruppe $H = \langle \{id, (1,2)\}, \circ \rangle$ von $\langle S_3, \circ \rangle$ und das Element $a = (23) \in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} aH &= \{(23) \circ id, (23) \circ (12)\} = \{(23), (132)\} \\ Ha &= \{id \circ (23), (12) \circ (23)\} = \{(23), (123)\} \end{aligned}$$

Satz von Lagrange

Satz 8.16

Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine endliche Gruppe und $\langle H, \oplus \rangle$ eine Untergruppe von G. Es gilt

$$|H| \;\Big|\; |G|$$

Proof.

Wir zeigen: Die Menge der Rechtsnebenklassen bildet eine Partition mit gleichgroßen Klassen. Im Detail:

1. $\bigcup_{g \in G} gH = G$
2. gH paarweise disjunkt
3. $|gH| = |H|$

□

Beweis:

1. $\bigcup_{a \in G} aH = G$

Klar, da $e \in H$ (H ist Untergruppe).

Beweis:

2. $\forall a, a' \in G.\ \ aH \cap a'H \neq \emptyset \ \ \Rightarrow \ \ aH = a'H$.

Beweis:

Seien $a, a' \in G$ mit $aH \cap a'H \neq \emptyset$. Dann gibt es $h, h' \in H$ mit $a \oplus h = a' \oplus h'$, also

$$a \quad = \quad a' \oplus h' \oplus h^{-1} \tag{2.1}$$

Zeige o.B.d.A. $aH \subseteq a'H$ (Antisymmetrie-Beweisprinzip). Sei $g \in aH$. Dann gibt es ein $h'' \in H$ mit $g = a \oplus h''$. Also folgt:

$$g \quad = \quad a \oplus h'' \quad \stackrel{(1)}{=} \quad \overbrace{a' \oplus h' \oplus h^{-1}}^{a} \oplus h'' \in a'H$$

$$a' \oplus \underbrace{h' \oplus h^{-1} \oplus h''}_{\in H}$$

Beachte: $h' \oplus h^{-1} \oplus h'' \in H$, da H eine Untergruppe ist.

Beweis:

3. $\forall a, a' \in G.\ |aH| = |a'H|$.

   Beweis:

   Sei $f : aH \to G$ mit $b \mapsto a' \oplus a^{-1} \oplus b$. Zu zeigen

   1. $\forall b \in aH.\ f(b) \in a'H$
   2. f ist injektiv

   Zu 1) Wegen $b \in aH$ gibt es ein $h \in H$ mit $b = a \oplus h \in aH$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a \oplus h) \\ &= a' \oplus \underbrace{a^{-1} \oplus a}_{e} \oplus h \\ &= a' \oplus h \in a'H. \end{aligned}$$

Beweis:

Es gelte: $f(b_1) = f(b_2)$. Zu zeigen: $b_1 = b_2$.

$$\begin{aligned}
b_1 &= a \oplus h_1 \\
&= \underbrace{a \oplus \overbrace{a'^{-1} \oplus a'}^{e} \oplus a^{-1}}_{e} \oplus \overbrace{a \oplus h_1}^{b_1} \\
&= a \oplus a'^{-1} \oplus \underbrace{a' \oplus a^{-1} \oplus a \oplus h_1}_{f(b_1)} \\
&\overset{Vor.}{=} a \oplus a'^{-1} \oplus f(b_2) \\
&= a \oplus a'^{-1} \oplus \overbrace{a' \oplus a^{-1} \oplus a \oplus h_2}^{f(b_2)} \\
&= \underbrace{a \oplus \overbrace{a'^{-1} \oplus a'}^{e} \oplus a^{-1}}_{e} \oplus \overbrace{a \oplus h_2}^{b_2} \\
&= a \oplus h_2 \\
&= b_2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
b_1 &= a \oplus h_1 \\
b_2 &= a \oplus h_2 \\
f(b) &= a' \oplus a^{-1} \oplus b
\end{aligned}}$$

Normalteiler

Definition 8.17

Sei $\langle H, \oplus \rangle$ eine Untergruppe von $\langle G, \oplus \rangle$. Wenn die Rechts- und Linksnebenklassen für alle $a \in G$ übereinstimmen ($Ha = aH$), wird H ein Normalteiler von G genannt (Notation: $H \lhd G$).

Beispiel 8.18

$$\langle \{id, (123), (132)\}, \circ \rangle \lhd \langle S_3, \circ \rangle$$

Wähle z.B. $a = (23) \in S_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(23) \circ N &= \{(23) \circ id, (23) \circ (123), (23) \circ (132)\} \\
&= \{(23), (13), (12)\} \\
N \circ (23) &= \{id \circ (23), (123) \circ (23), (132) \circ (23)\} \\
&= \{(23), (12), (13)\} = (23) \circ N
\end{aligned}$$

Normalteiler

Definition 8.17

Sei $\langle H, \oplus \rangle$ eine Untergruppe von $\langle G, \oplus \rangle$. Wenn die Rechts- und Linksnebenklassen für alle $a \in G$ übereinstimmen ($Ha = aH$), wird H ein Normalteiler von G genannt (Notation: $H \triangleleft G$).

Beispiel 8.18

$$\langle \{id, (123), (132)\}, \circ \rangle \triangleleft \langle S_3, \circ \rangle$$

$\langle \{id, (123), (132)\}, \circ \rangle$ wird auch als A_3 (alternierende Gruppe) bezeichnet.
$\langle A_3, \circ \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ (Isomorphie: später formal)

$\circ$	id	123	132
id	id	123	132
123	123	132	id
132	132	id	123

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Faktorgruppen

Lemma 8.19

Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann ist $\langle G/N, \oplus_N \rangle$ mit

$$G/N =_{df} \{aN \mid a \in G\}$$

eine Gruppe, wobei $\oplus_N$ wie folgt definiert ist:

$$aN \oplus_N bN = (a \oplus b)N$$

Wir nennen $\langle G/N, \oplus_N \rangle$ die Faktorgruppe von G bezüglich N.

Zu zeigen:

1. Wohldefiniertheit (Representantenunabhängigkeit)
2. G/N hat ein neutrales Element e_N.
3. $\forall a \in G. \exists a^{-1} \in G. \;\; aN \oplus a^{-1}N \; = \; e_N$

Die Faktorgruppe ist eine Gruppe

1. Wohldefiniertheit, d.h.

$$\forall a, a', b, b' \in G. \quad aN = a'N \land bN = b'N \quad \Rightarrow \quad aN \oplus_N bN = a'N \oplus_N b'N$$

Beweis:

Seien a, a', b, b' gegeben mit $aN = a'N \land bN = b'N$. Zu zeigen:

$$a'N \oplus b'N = aN \oplus_N bN$$

Zunächst gilt: $\exists n, n', n'' \in N.$ mit $a' = a \oplus n$, $b' = b \oplus n'$ und $n \oplus b = b \oplus n''$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a'N \oplus_N b'N &= (a' \oplus b')N \\ &= ((a \oplus n) \oplus (b \oplus n'))N \\ &= (a \oplus (n \oplus b) \oplus n')N = (a \oplus (b \oplus n'') \oplus n')N \\ &= ((a \oplus b) \oplus \underbrace{n'' \oplus n'}_{n'''})N \\ &= (a \oplus b)N = aN \oplus_N bN \end{aligned}$$

Die Faktorgruppe ist eine Gruppe

2. G/N hat ein neutrales Element e_N.
   Behauptung:
   $$e_G N = N = N e_G \text{ ist neutrales Element.}$$
   Sei $a \in G$. Dann gilt:
   $$aN \oplus_N e_G N = (a \oplus e_G)N = aN$$

3. G/N hat inverse Elemente:
   $$\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G.\ \ aN \oplus a^{-1}N = e_N$$
   Sei $N' \in G/N$.
   Dann ist zu zeigen: $\exists N''. N' \oplus_N N'' = N$. Zunächst gilt
   $\exists a \in G. N' = aN$
   und damit:
   $$aN \oplus a^{-1}N = (a \oplus a^{-1})N = e_G N$$

Korollar zum Satz von Lagrange

Lemma 8.20

Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine endliche Gruppe und H ein Normalteiler von G. Es gilt

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Homomorphismen

Definition 8.21

Seien $\langle G_1, \oplus_1\rangle$ und $\langle G_2, \oplus_2\rangle$ Gruppen und

$$f : \langle G_1, \oplus_1\rangle \to \langle G_2, \oplus_2\rangle$$

eine Abbildung. f heißt (Gruppen-)Homomorphismus gdw.

$$\forall a, b \in G_1.\ f(a \oplus_1 b) = f(a) \oplus_2 f(b)$$

Die Abbildung heißt

- Monomorphismus, wenn f zusätzlich **injektiv** ist.
- Epimorphismus, wenn f zusätzlich **surjektiv** ist.
- Isomorphismus, wenn f zusätzlich **bijektiv** ist.

Bei Gleichheit der beiden Gruppen nennt man f ferner

- Endomorphismus
- Automorphismus, wenn f auch **Isomorphismus** ist.

Homomorphismen - Eigenschaften

Lemma 8.22

Seien $\langle G_1, \oplus_1 \rangle$ und $\langle G_2, \oplus_2 \rangle$ Gruppen mit neutralen Elementen e_1 und e_2. Ferner sei

$$f : \langle G_1, \oplus_1 \rangle \rightarrow \langle G_2, \oplus_2 \rangle$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

1. $f(e_1) = e_2$
2. $\forall a \in G_1.\ f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

Beispiele für Homomorphismen

Beispiel 8.23

1. $\varphi : \langle A^*, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{N}, + \rangle$ mit $w \mapsto |w|$ bildet einen Monoidepimorphismus, denn es gilt $\varphi(\varepsilon) = |\varepsilon| = 0$ und

$$\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1 w_2) = |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| = \varphi(w_1) + \varphi(w_2)$$

Surjektiv: Sei $a \in A$. $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(a^n) = n$.

Nicht injektiv: $\varphi(ab) = \varphi(ba) = 2$.

2. $\varphi : \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{N}, + \rangle$ mit $f(x) = x^2$ bildet keinen Homomorphismus, denn

$$\varphi(x + y) = (x + y)^2 \neq x^2 + y^2 = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Beispiele für Homomorphismen

Beispiel 8.23

3. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann ist

$$f : G \to G/N \text{ mit } f(g) = gN$$

ein Gruppenepimorphismus.

4. Sei G eine Gruppe und $b \in G$. Dann ist

$$A_b : G \to G \text{ mit } A_b(g) = b^{-1}gb$$

ein Gruppenautomorphismus.

Kern eines Homomorphismus

Definition 8.24

Für einen Homomorphismus

$$\varphi : \langle G_1, \oplus \rangle \to \langle G_2, \oplus_2 \rangle$$

mit neutralem Element e_1 und e_2, ist der Kern von φ die Menge der Elemente die auf das neutrale Element in G_2 abgebildet werden:

$$kern(\varphi) = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\}$$

Beispiel 8.25

$\varphi : \langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle \to \langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ mit $\varphi(x) = 2x$ ist ein Homomorphismus. Es gilt:

$$Kern(\varphi) = \{0, 3\}$$

Gruppenstruktur und Morphismen

Satz 8.27

Sei φ ein Gruppenhomomorphismus.

1. $Kern(\varphi)$ bildet einen Normalteiler von G_1,
2. $Bild(\varphi) = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1.\ \varphi(x) = y\}$ bildet eine Untergruppe von G_2.

Homomorphiesatz

$G/Kern(\varphi)$ ist isomorph zu $Bild(\varphi)$.

Satz 8.28

Die Menge aller Automorphismen einer Gruppe ist zusammen mit der Komposition selbst eine Gruppe.

Konstruktionsmuster für Gruppen

Lemma 8.31 (Schnitte von Unter(halb)gruppen)

Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe (Halbgruppe) und $\langle H_1, \oplus \rangle, \langle H_2, \oplus \rangle$ Untergruppen (Unterhalbgruppen) von G. Dann gilt: Der Schnitt $\langle H_1 \cap H_2, \oplus \rangle$ ist ebenfalls eine Untergruppe (Unterhalbgruppe) von G.

Achtung: Gilt nicht für Monoide (siehe Beispiel 8.11 mit Untermonoiden $\{a\}$ und $\{b\}$.)

Konstruktionsmuster für Gruppen

Analog zu Produktverbänden definiert man:

Produktstruktur

Für Halbgruppen (Monoiden, Gruppen) $\langle A, \oplus_A \rangle$ und $\langle B, \oplus_B \rangle$ definieren wir das Produkt als Struktur $\langle A \times B, \oplus \rangle$, wobei die Verknüpfung wie folgt definiert ist:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) \ =_{df} (a_1 \oplus_A a_2, b_1 \oplus_B b_2).$$

Konstruktionsmuster für Gruppen

Lemma 8.32 (Produkte von (Halb)gruppen)

Seien $\langle A, \oplus_A \rangle$ und $\langle B, \oplus_B \rangle$ Halbgruppen (Monoide, Gruppen). Dann gilt: Das Produkt $\langle A \times B, \oplus \rangle$ ist ebenfalls eine Halbgruppe (ein Monoid, eine Gruppe).

Sind A und B (mindestens) Monoide, und sind e_A bzw. e_B die neutralen Elemente in A bzw. B, so ist (e_A, e_B) das neutrale Element des Produktmonoids.

Sind A und B Gruppen, und sind zu $a \in A, b \in B$ die inversen Elemente jeweils a^{-1} und $b{-}1$, so ist (a^{-1}, b^{-1}) in der Produktgruppe das zu (a, b) inverse Element.

Konstruktionsmuster für Gruppen

Lemma (Erweiterte Produkte von (Halb)gruppen)

Sei $\langle A, \oplus_A \rangle$ Halbgruppe (Monoid, Gruppe) und M eine Menge. Dann gilt: Das erweiterte Produkt $\langle A^M, \oplus \rangle$ ist ebenfalls eine Halbgruppe (ein Monoid, eine Gruppe). Dabei ist die Verknüpfung $\oplus$ komponentenweise wie folgt definiert:

$$(f \oplus g)(m) \ =_{df} \ f(m) \oplus_A g(m).$$

Konstruktionsmuster für Gruppen

Lemma 8.33 (Produkthomorphismen)

Seien $\langle A_1, \oplus_{A_1}\rangle, \langle B_1, \oplus_{B_1}\rangle, \langle A_2, \oplus_{A_2}\rangle$ sowie $\langle B_2, \oplus_{B_2}\rangle$ Halbgruppen (Monoide, Gruppen), und seien ferner $h_A\colon \langle A_1, \oplus_{A_1}\rangle \to \langle A_2, \oplus_{A_2}\rangle$ sowie $h_B\colon \langle B_1, \oplus_{B_1}\rangle \to \langle B_2, \oplus_{B_2}\rangle$ Halbgruppen- (Monoid-, Gruppen-)Homomorphismen. Dann ist $h\colon A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ mit

$$h((a, b)) =_{df} (h_A(a), h_B(b))$$

ein Halbgruppen- (Monoid-, Gruppen-)Homomorphismus von $\langle A_1 \times B_1, \oplus_1\rangle$ nach $\langle A_2 \times B_2, \oplus_2\rangle$, wobei $\oplus_1$ und $\oplus_2$ wie üblich durch komponentenweise Anwendung von $\oplus_{A_1}$ und $\oplus_{B_1}$ bzw. $\oplus_{A_2}$ und $\oplus_{B_2}$ definiert sind.

Themenübersicht

Mengen mit einer Operation

- Halbgruppen $\surd$
- Monoide $\surd$
- Gruppen $\surd$

Mengen mit zwei Operationen

- Körper
- Ringe

Mengen mit zwei Operationen

Mengen mit zwei Operationen

Rückblick

Bisher: Mengen mit einer Operation

- Halbgruppen $\surd$
- Monoide $\surd$
- Gruppen $\surd$

$$
\begin{array}{l}
\text{Halbgruppe} \\
\big\downarrow \quad +\text{Neutrales Element bezüglich } \oplus \\
\text{Monoid} \\
\big\downarrow \quad +\text{ Inverses Element bezüglich } \oplus \\
\text{Gruppe}
\end{array}
$$

Jetzt: Weitere Operation $\odot : G \times G \to G$ definiert.

Ringe

Definition 8.34

Eine Menge R mit Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt Ring gdw.

- $\langle R, \oplus \rangle$ bildet eine kommutative Gruppe,
- $\langle R, \odot \rangle$ bildet eine Halbgruppe,
- Es gelten die **Distributivgesetze**:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R.\ a \odot (b \oplus c) &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ \forall a, b, c \in R.\ (a \oplus b) \odot c &= (a \odot c) \oplus (b \odot c) \end{aligned}$$

Ein Ring $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ heißt kommutativ gdw. auch $\langle R, \odot \rangle$ kommutativ ist.

Ringe

Beispiel 8.35

Ringe?

- $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$
  Ja, kommutativer Ring mit neutralem Element 0 (bzgl. $+$) und neutralem Element 1 (bzgl. $\cdot$).
- $\langle m\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ Unterring von $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$
  Ja.
- $\langle \mathfrak{P}(M), \Delta, \cap \rangle$ (Potenzmenge, symmetrische Differenz, Schnittmenge)
  Ja.
- $\langle \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \mathbb{R}\}, +, \cdot \rangle$ (Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten). Ja.

Unterringe

Definition

Analog zum Begriff der Untergruppe bildet eine nichtleere Teilmenge $R' \subseteq R$ eines Ringes $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ einen Unterring, wenn $\langle R', \oplus, \odot \rangle$ ein Ring ist.

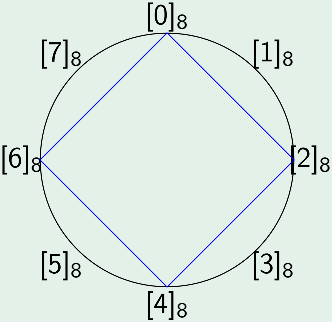
Bemerkungen:

- Ein Unterring eines kommutativen Ringes ist kommutativ.
- Ein Unterring eines Ringes mit Einselement hat nicht notwendig selbst ein Einselement. Beispiel: $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.
- Triviale Unterringe von $\langle R, \oplus, \odot \rangle$:
  $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ und $\langle \{0\}, \oplus, \odot \rangle$.

Unterringe von $\mathbb{Z}_8$

Beispiel 8.36

Ring $\mathbb{Z}_8$ mit Unterring $\{[0], [2], [4], [6]\}$.



Weitere Unterringe: $\mathbb{Z}_8$ selbst und $\{[0]\}$ und $\{[0], [4]\}$.

Ideale

Definition 8.37

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring. $I \subseteq R$ heißt Linksideal gdw.

1. $\langle I, \oplus \rangle$ ist Untergruppe von $\langle R, \oplus \rangle$
2. $\forall a \in I, r \in R.\ \ r \odot a \in I$

(Mit $\forall a \in I, r \in R.\ \ a \odot r \in I$ analog Rechtsideal)
$I \subseteq R$ heißt Ideal gdw. I Links- und Rechtsideal. Notation: $I \lhd R$.

Bemerkungen

- Wegen 1) gilt $I \neq \emptyset$
- Falls R kommutativ ist gilt:

$$I \text{ Linksideal} \;\Leftrightarrow\; I \text{ Rechtsideal} \;\Leftrightarrow\; I \text{ Ideal}$$

Ideale

Bemerkungen

- $2 \cdot \mathbb{Z}$ ist Ideal in $\mathbb{Z}$
- Sowohl 0 als auch R sind Ideale in jedem Ring. Triviale Ideale.
- Ein Ring heißt einfach gdw. nur triviale Ideale.

Beispiel 8.38

- Unterringe $m\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sind Ideale.
- Endlichen oder co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind Unterring von $\langle\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap\rangle$. Kein Ideal.
- Polynome $p(x)$ mit $p(1) = 0$ sind Ideal der Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten.

Abgeschlossenheitseigenschaften

Satz 8.39

Es gilt für beliebige Ideale $I, J \lhd R$, auch, dass

- $I \cap J \lhd R$ (Infimum)
- $I + J =_{df} \{a \oplus b \mid a \in I, b \in J\} \lhd R$ (Supremum !)

Ideale sind.

Satz 8.40 (Verband der Ideale)

Die Menge aller Ideale eines Rings bildet einen algebraischen Verband.

$$(\{I \mid I \lhd R\}, +, \cap)$$

Faktorringe

Lemma 8.41

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring. und I ein Ideal von R. Dann bezeichne

$$R/I =_{df} \{a + I \mid a \in R\} \text{ mit } a \oplus I =_{df} \{a \oplus i \mid i \in I\}$$

und

$$\begin{aligned}
(a \oplus I) \oplus_F (b \oplus I) &= (a \oplus b) \oplus I \\
(a \oplus I) \odot_F (b \oplus I) &= (a \odot b) \oplus I
\end{aligned}$$

den Faktorring $\langle R/I, \oplus_F, \odot_F \rangle$ von R bezüglich I.

Ringhomomorphismen

Definition 8.42

Eine Funktion

$$f : \langle R, \oplus_R, \odot_R \rangle \to \langle S, \oplus_S, \odot_S \rangle$$

heißt Ringhomomorphismus gdw. $\forall a, b \in R$:

1. $f(a \oplus_R b) = f(a) \oplus_S f(b)$
2. $f(a \odot_R b) = f(a) \odot_S f(b)$

Sind R und S Ringe mit Einselement, also solche, für die 1_R und 1_S existieren, so gilt zusätzlich:[a]

3) $f(1_R) = 1_S$.

[a] Diese Bedingung ist ohnehin erfüllt, wenn f surjektiv ist.

Ringhomomorphismen

Beispiel 8.43

- $\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \backslash n\mathbb{Z}$ mit $z \mapsto (z \bmod n)\mathbb{Z}$
- $\alpha_r : \langle \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}, +, \cdot\rangle \to \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ mit $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$

Satz 8.44

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring und I ein Ideal von R. Dann bildet die Funktion

$$f : R \to R/I \text{ mit } a \mapsto a \oplus I$$

einen Ringepimomorphismus mit $Kern(f) = I$.

Ringhomomorphismen

Satz 8.45

Sei f ein Ringhomomomorphismus. Dann gilt:

$$Kern(f) =_{df} \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$

bildet ein Ideal

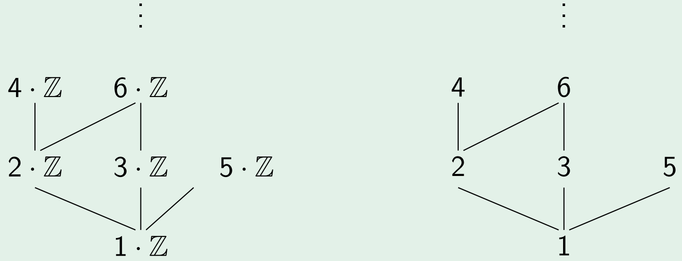
Verbandshomomorphismen

Lemma 8.46

Die Abbildung

$$f : \langle \{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \}, \supseteq \rangle \to \langle \mathbb{N}, | \rangle, \quad n\mathbb{Z} \mapsto n$$

aller Ideale $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ nach $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ ist ein Ordnungshomomorphismus auf Verbänden.



Nullteiler

Definition 8.47

Ein Element $0 \neq a \in R$ in einem Ring $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ heißt Nullteiler gdw.

$$\exists b \neq 0 \in R.\ \ a \odot b = 0 \vee b \odot a = 0.$$

Existieren keine Nullteiler in einem Ring, so heißt er nullteilerfrei.

Beispiel 8.48

Nullteilerfrei?

- $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7 \rangle$ Ja, nullteilerfrei.
- $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$ Nicht nullteilerfrei. Nullteiler sind 2, 3 und 4, denn $2 \cdot_6 3 = 0$ und $3 \cdot_6 4 = 0$.
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($n \times m$-Matrizen über $\mathbb{R}$). Nicht nullteilerfrei (Sogar unendlich viele Nullteiler)

Nullteiler

Lemma

Ist $\langle G, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring und $a \in R$ Nullteiler, so hat a kein multiplikativ Inverses.

Beweis

O.B.d.A sei $a \odot b = 0$ für $a, b \neq 0$.

Annahme es gäbe multiplikativ inverses Element zu a. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b &= 1 \odot b \\ &= (a^{-1} \odot a) \odot b \\ &= a^{-1} \odot (a \odot b) && \text{(Assoziativität)} \\ &= a^{-1} \odot 0 && \text{(Voraussetzung)} \\ &= 0 && \text{(Widerspuch!)} \end{aligned}$$

Integritätsbereich

Definition 8.49

Ist $\langle G, \oplus, \odot \rangle$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring, so heißt $\langle G, \oplus, \odot \rangle$ Integritätsbereich.

Definition 8.50

Ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein kommutativer Ring und $P \subset R$ ein Ideal von R, so heißt P Primideal genau dann, wenn

$$\forall a, b \in R.\ a \odot b \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$$

Integritätsbereich

Satz 8.51

Ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein kommutativer Ring. Dann gilt

$$R/P \text{ nullteilerfrei} \Leftrightarrow P \text{ Primideal}$$

Korollar 8.52

Ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein kommutativer Ring mit 1. Dann gilt:

$$R/P \text{ Integritätsbereich} \Leftrightarrow P \text{ Primideal}$$

Konstruktionsmuster für Ringe

Schnitte von Unterringen

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring und $\langle R_1, \oplus_1, \odot_1 \rangle, \langle R_2, \oplus_2, \odot_2 \rangle$ Unterringe von R. Dann gilt: Der Schnitt $\langle R_1 \cap R_2, \oplus, \odot \rangle$ ist ebenfalls ein Unterring von R.

Konstruktionsmuster für Ringe

Produkte von Ringen

Seien $\langle A, \oplus_A, \odot_A\rangle$ und $\langle B, \oplus_B, \oplus_B\rangle$ Ringe. Dann gilt: Das Produkt $\langle A \times B, \oplus, \odot\rangle$ ist ebenfalls ein Ring, wobei

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) \;=_{df}\; (a_1 \odot_A a_2, b_1 \odot_B b_2).$$

Das Nullelement ist $(0_A, 0_B)$.

Sind sowohl A als B Ringe mit 1, so ist $(1_A, 1_B)$ Einselement von $A \times B$.

Achtung: Das Produkt erhält nicht die Nullteilerfreiheit.

Beispiel $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$: $(0,1) \cdot (1,0) = (0,0)$.

Körper

Definition 8.53

Ein Integritätsbereich $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ heißt Körper, falls $\langle G \backslash \{0\}, \odot \rangle$ ebenfalls eine Gruppe ist.

Beispiel 8.54

Körper?

- $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ Nein, bzgl. Multiplikation i.A. keine Inverse.
- $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p \rangle$, p Primzahl. Ja (siehe folgenden Satz 8.50).
- $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ Ja.
- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ Ja.

Bemerkung: Ist die multiplikative Gruppe nicht kommutativ, liegt ein sogenannter Schiefkörper vor.

Körper

Satz 8.55

Ein endlicher Integritätsbereich $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ist bereits schon ein Körper.

Beweisidee

Zu zeigen ist die Existenz der multiplikativ Inversen für $R \backslash \{0\}$.

Sei $r \in R \backslash \{0\}$. Betrachte (wg. Nullteilerfreiheit):

$$\begin{aligned} f_r : & R \backslash \{0\} \to R \backslash \{0\} \\ & s \mapsto r \odot s \end{aligned}$$

f_r ist injektiv. Weil R endlich ist folgt, dass f_r auch surjekiv ist.
Also existiert ein $s \in R \backslash \{0\}$ mit $r \odot s = 1$.

Wegen der Kommutativität von $\odot$ gilt dann auch: $r \odot s = s \odot r = 1$.

Unterkörper

Definition (Unterkörper)

Analog zum Begriff des Unterringes bildet eine nichtleere Teilmenge $K' \subseteq K$ eines Körpers $\langle K, \oplus, \odot \rangle$ einen Unterkörper, wenn $\langle K', \oplus, \odot \rangle$ ein Körper ist.

Beispiele:

- $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$

Körper und Ideale

Satz 8.56

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Dann gilt:
R ist Körper $\Leftrightarrow$ R ist einfach (d.h. hat nur die trivialen Ideale).

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $I \subseteq K$ Ideal mit $I \neq \{0\}$.

Dann existiert $a \in I$, so dass $a \neq 0$.

Weil K Körper ist, gilt $a \odot a^{-1} = 1 \in I$.

Wegen $1 \in I$ gilt $I = K$.

Körper und Ideale

Satz 8.56

Sei $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Dann gilt:
R ist Körper $\Leftrightarrow$ R ist einfach (d.h. hat nur die trivialen Ideale)

Beweis:

"$\Leftarrow$": Per Kontraposition. Wenn R nicht Körper ist, existiert $a \in R/\{0\}$ ohne multiplikativ Inverses. Dieses gilt insbesondere, wenn R Nullteiler besitzt (Lemma auf Folie 251).

Betrachte Ideal $(a) =_{df} a \odot R$ (Hauptideal zu a).

Wegen $1 \notin (a)$ gilt: $\{0\} \subset (a) \subset R$.

Also ist R nicht einfach.

Faktorstrukturen

Satz 8.57

Sei $\langle R, \oplus, \odot\rangle$ kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ und $\{0\} \subset I \subset R$ nichttriviales Ideal. Dann:

$$R/I \text{ ist Körper } \Leftrightarrow \ I \ \text{ ist maximal.}$$

Beweis:

$$\begin{array}{lcll} I \text{ maximal} & \Leftrightarrow & \nexists \text{ Ideal } J.\ I \subset J \subset R & \\ & \Leftrightarrow & R/I \text{ ist einfach} & (*) \\ & \Leftrightarrow & R/I \text{ ist Körper} & (\text{Satz } 8.56) \end{array}$$

Zu (*): Einem Ideal $\{0\} \subset J \subset R$ ordne das Ideal $\{0\} \subset J/I \subset R/I$ zu.
Einem Ideal $\{0\} \subset \bar{J} \subset R/I$ ordne das Ideal $\{r \in R \mid (r) \in \bar{J}\}$ zu.

Körperhomomorphismen

Satz 8.59

Körperhomomorphismen sind injektiv, also stets Körper<u>mono</u>morphismen.

Beweis:

Sei $h : K \to K'$ Körperhomomorphismus.

Weil h insbesondere Ringhomomorphismus ist, folgt dass $Kern(h)$ Ideal ist (analog Satz 8.27).

Weil K nach Satz 8.56 nur triviale Ideale besitzt, kommen nur $Kern(h) = \{0\}$ oder $Kern(h) = K$ in Frage.

$Kern(h) = K$ scheidet aus wegen $h(1_K) = 1_{K'} \neq 0_{K'}$.

Aus $Kern(h) = \{0\}$ folgt, dass h injektiv ist . ($\to$ Übungen)

Konstruktionsmuster für Körper

Schnitte von Unterkörpern

Sei $\langle K, \oplus, \odot \rangle$ ein Körper und $\langle K_1, \oplus, \odot \rangle$, $\langle K_2, \oplus, \odot \rangle$ Unterkörper von K.
Dann gilt: Der Schnitt $\langle K_1 \cap K_2, \oplus, \odot \rangle$ ist ebenfalls ein Unterkörper von K.

Konstruktionsmuster für Körper

Produkte von Körpern

Seien $\langle A, \oplus_A, \odot_A \rangle$ und $\langle B, \oplus_B, \oplus_B \rangle$ Körper. Dann gilt: Das Produkt $\langle A \times B, \oplus, \odot \rangle$ ist ein kommutativer Ring mit 1, i.A. aber kein Körper (siehe Produkte von Integritätsbereichen).

Veralleinerte Produkte

Sei M eine Menge und $\langle K, \oplus_K, \odot_K \rangle$ ein Körper. Dann ist das erweiterte Produkt $\langle K^M, \oplus \rangle$ eine kommutative Gruppe. Definiert man eine äußere (skalare) Multiplikation $\cdot : K \times K^M$ durch

$$(k \cdot v)(m) \ =_{df} \ k \odot_K v(m) \ \text{ für alle } m \in M$$

so erhält man einen K-Vektorraum ($\rightarrow$ näheres im Teil "Lineare Algebra").

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Aussagenlogik / Prädikatenlogik
- Semantische Äquivalenz
- Beweisprinzipien (semantisch / syntaktisch)
- Mengengesetze
- ...

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Kartesische Produkte / Bitvektoren
- Funktionen und deren Eigenschaften
- Beweisprinzipien
  (Direkter Beweis Kontraposition / Widerspruchsbeweis / Quantoren Auflösung / Diagonalverfahren)
- Mächtigkeiten
- Äquivalenzrelationen / Partitionen
- ...

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Peano-Axiome
- Induktive Mengen, Algorithmen und Operationen
- Boolesche Terme
- ...

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Zeichenreihen
- Semantikschemata
- Backus Naur Form
- ...

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

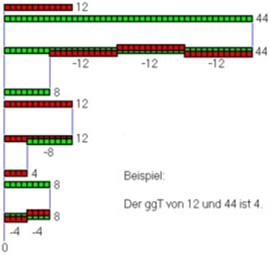
- Partielle Ordnungen / Hasse-Diagramme
- Noethersche Induktion
- Strukturelle Induktion
- Vollständige Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Ringschluss (Antisymmetrie Beweisprinzip)
- . . .

Was bisher geschah...

Euklid, ca. 360 - 280 v. Chr.

EUKLID (a, b)

wenn $b = 0$
    dann return a
sonst wenn $a = 0$
    dann return b
sonst wenn $a > b$
    dann EUKLID $(a - b, b)$
sonst return EUKLID $(a, b - a)$



Kern: Invariante
GGT(a,b) = GGT(a,a-b)
= GGT(b,b-a)

Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Algebraische Verbände
- Ordnungsstrukturelle Verbände
- Vollständige Verbände
- Boolesche Verbände
- Homomorphismen
- ...

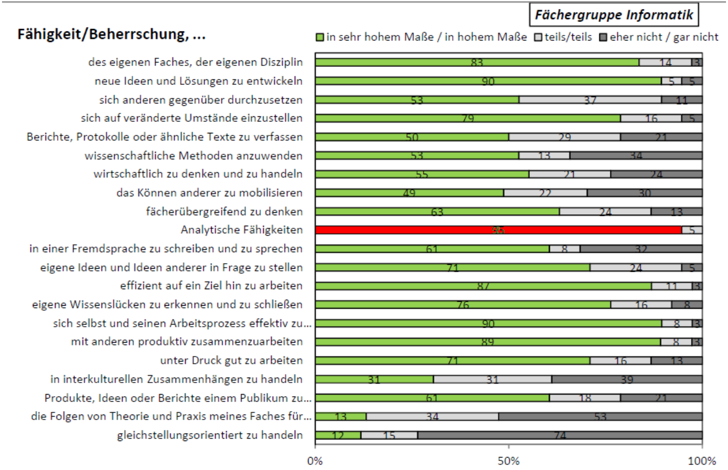
Was bisher geschah...

2. Aussagen und Mengen
3. Relationen und Funktionen
4. Induktives Definieren
5. Darstellung und deren Bedeutung
6. Induktives Beweisen
7. Ordnungsstrukturen
8. Algebraische Strukturen

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen
- Untergruppen
- Normalteiler
- Satz von Lagrange
- Homomorphismen
- Faktorstrukturen
- Ringe, Körper
- Ideale
- Schubfachprinzip
- ...

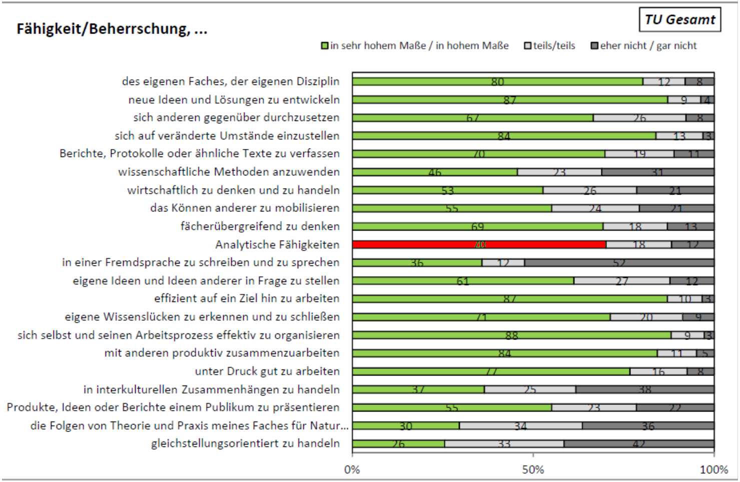
Absolventenbefragung WS 08/09 und 10/11

"Inwieweit werden die folgenden Kompetenzen in Ihrer gegenwärtigen Erwerbstätigkeit gefordert?"



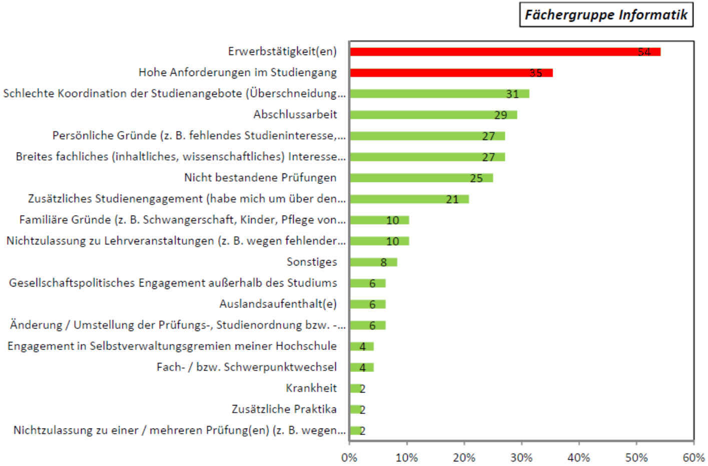
Absolventenbefragung WS 08/09 und 10/11

"Inwieweit werden die folgenden Kompetenzen in Ihrer gegenwärtigen Erwerbstätigkeit gefordert?"



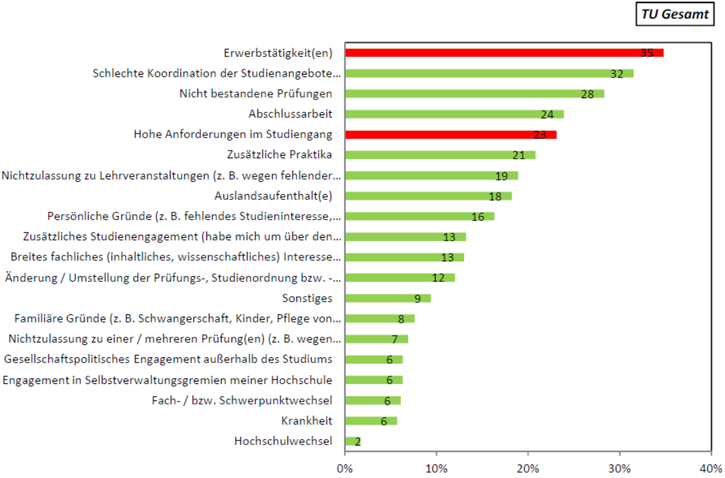
Absolventenbefragung WS 08/09 und 10/11

"Warum haben Sie länger studiert, als in der Regelstudienzeit vorgesehen?"



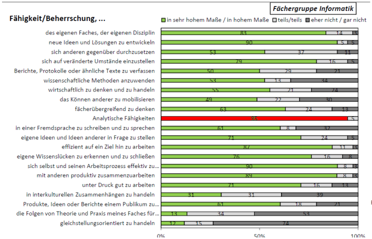
Absolventenbefragung WS 08/09 und 10/11

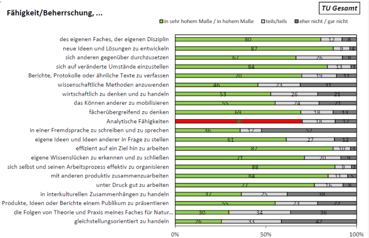
"Warum haben Sie länger studiert, als in der Regelstudienzeit vorgesehen?"

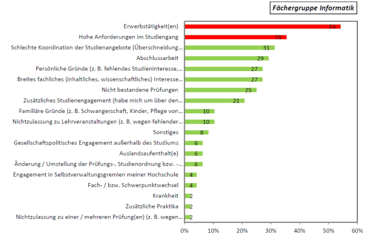


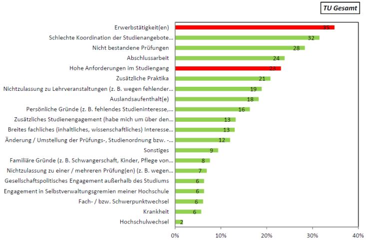
Absolventenbefragung WS 08/09 und 10/11

"Ergebnisse der Absolventenbefragung des Prüfungsjahrgangs 2008/09 im WS 2010/11"









Algebraische Strukturen

Halbgruppe

$\uparrow$

Monoid

$\uparrow$

Gruppe

$\uparrow$

Ring

$\uparrow$

Körper

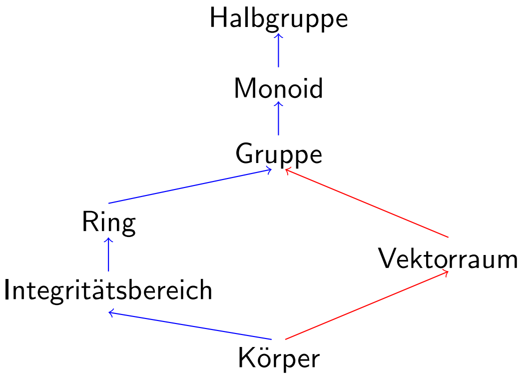
Halbgruppe, Monoid, Gruppe: $\langle G, \oplus \rangle$

Ring, Körper: $\langle G, \oplus, \odot \rangle$

Normalteiler (Gruppe) $\leftrightarrow$ Ideale (Ring)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \langle A^*, \cdot \rangle & & & & \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle & & \\
 & & \ni & & \not\in & & \ni & & \not\in \\
HG & \supseteq & M & \supseteq & G & \supseteq & R & \supseteq & K \\
\ni & & \not\in & & \ni & & \not\in & & \ni \\
\langle \mathbb{N} \backslash \{0\}, + \rangle & & & & \langle \mathbb{Z}, +, - \rangle & & & & \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle
\end{array}$$

Algebraische Strukturen



Algebraische Strukturen

1 Operation $\oplus$

Assoziativität, Neutrales und Inverses Element

Untergruppen

Normalteiler

Faktorgruppen

Gruppe

Lineare Abbildungen

Matrizen

Determinanten

Eigenvektoren

u.v.m ...

Ring

Vektorraum

2 Operationen $\oplus$,$\odot$

Keine inv. bzgl. $\odot$

Unterringe, Ideale

Faktorringe

(endl.) Körper

Existenz von $e_\odot$

Nullteilerfreiheit

Existenz von Inversen

Teil1/Teil2-Schnittstelle

Strukturen

Gruppe/Ringe/Körper	Vektorräume
Normalteiler/Ideal/Unterkörper	Untervektorräume
Faktor-Gruppe/-Ringe	Faktorräume

Lösungsansatz

Homomorphismen	Lineare Abbildung / Matrizen
(Nebenklassen des) Kerns	Lösungsraum
Isomorphismen	Determinante $\neq 0$
	Damit eindeutige Lösbarkeit des zug. lin. Gleichungssystems.

Engineering

Finden geeigneter Repräsentationen	Basistransformationen
Induktiv definierte Strukturen	Basis aus Eigenvektoren