lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Heimarbeitsblatt 14

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: keine Abgabe

Dieses Arbeitsblatt dient der Selbstkontrolle. Bearbeiten Sie die Aufgaben zunächst selbstständig, bevor Sie Ihre Lösung mit den Lösungshinweisen vergleichen. Eine Abgabe ist nicht vorgesehen!

Abgabefrist: keine Abgabe

Aufgabe 14.1 *Lineare Abbildungen* (Selbstkontrolle)
Geben Sie in jeder der folgenden drei Teilaufgaben an, ob die Abbildung f linear ist. Wenn ja, beweisen Sie ihre Aussage. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. Sei $V = \mathbb{R}$ und $f : V \to V$ gegeben durch $f(x) =_{df} x + 1$.
2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $f : V \to V$ gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$.
3. Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W = \mathbb{R}$. Sei ℓ eine lineare Abbildung von V nach W. Definiere $f : V \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{v}) =_{dr} \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14.2 *Lineare Abbildungen, Isomorphismen* (Selbstkontrolle)
Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine fest gewählte reelle Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass f_α eine lineare Abbildung ist.
2. Ist f_α ein Vektorraumisomorphismus? Beweisen bzw. widerlegen Sie.

3*. Welche geometrische Bedeutung hat f_α?

Aufgabe 14.3 *Kern, Bild, Homomorphiesatz* (Selbstkontrolle)

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y + z \\ 0 \\ -x + \frac{1}{3}z \\ -2x - y \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen sie den Kern von f und geben Sie eine Basis für Kern(f) an.

Beantworten Sie mit Hilfe Ihrer Lösung von 1. die folgenden Fragen:

2. Welche Dimension hat das Bild von f?
3. Ist f injektiv?

Aufgabe 14.4 *Untervektorräume, Isomorphismen* (Selbstkontrolle)
Wir definieren $U =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ und $W =_{df} \{s \cdot (1, 2, 3)^t + t \cdot (0, 1, 1)^t \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$. U und W sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: U und W sind isomorph.

Aufgabe 14.5 *Vektorräume, injektive und bijektive Abbildungen* (Selbstkontrolle)
Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Wir betrachten $U_1 \times U_2$ und die Abbildungen $+ : (U_1 \times U_2) \times (U_1 \times U_2) \to U_1 \times U_2$ und $\cdot : K \times (U_1 \times U_2) \to (U_1 \times U_2)$, definiert durch

$$(\vec{x_1}, \vec{x_2}) + (\vec{x_3}, \vec{x_4}) =_{\text{df}} (\vec{x_1} + \vec{x_3}, \vec{x_2} + \vec{x_4})$$
$$s \cdot (\vec{x_1}, \vec{x_2}) =_{\text{df}} (s \cdot \vec{x_1}, s \cdot \vec{x_2})$$

für alle $\vec{x_1}, \vec{x_3} \in U_1$, $\vec{x_2}, \vec{x_4} \in U_2$ und $s \in K$. Zeigen Sie:

1. $(U_1 \times U_2, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.
2. Die Funktion $f : U_1 \times U_2 \to V$ definiert durch $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) =_{df} 2 \cdot \vec{x_1} + \vec{x_2}$ ist genau dann injektiv, wenn $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gilt, wobei $\vec{0}$ das neutrale Element von V bzgl. der Vektoraddition ist.

Aufgabe 14.6 (1+1+1 Punkte)

Gegeben ist die 3×4-Matrix $A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über dem Körper der reellen Zahlen.

1. Berechnen Sie den Rang von A.

2. Bestimmen Sie $Kern\,(\varphi_A)$ und $Bild\,(\varphi_A)$ und verifizieren Sie den Dimensionssatz.

3. Bestimmen Sie die Matrix von φ_A bezüglich der Basen

$$B =_{df} \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B' =_{df} \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$.