lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 13

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

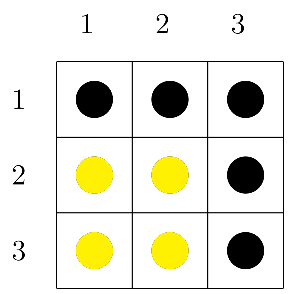
Abgabefrist: 31.1.2014, 14:00 Uhr

Aufgabe 13.1 *Lights out*
In dieser Aufgabe greifen wir die Übungsaufgabe 0.3 des ersten Präsenzblattes noch einmal auf.

In einem Spielfeld sind 9 Schalter in Form eines 3×3-Gitters angeordnet. Durch Drücken eines Schalters kann dieser ein- bzw. ausgeschaltet werden, wobei nach jedem Drücken der Zustand wechselt. Im eingeschalteten Zustand leuchtet der Schalter gelb auf, im ausgeschalteten Zustand ist der Schalter schwarz. Durch das Drücken eines Schalters wechselt aber nicht nur der gedrückte Schalter seinen Zustand, sondern auch alle direkt angrenzenden Schalter, das sind diejenigen Schalter, die oben, unten, links oder rechts am gedrückten Schalter anliegen.
Man überlegt sich leicht:

- Wird ein Schalter eine gerade Anzahl oft gedrückt, so hat dies keine Auswirkungen (ist also genau so, als hätte man den Schalter nicht gedrückt).
- Der Zustand eines Schalters hängt nur davon ab, wie oft er und seine anliegenden Nachbarn gedrückt worden sind. Die Reihenfolge, in der die Schalter gedrückt werden, spielt keine Rolle.

Gegeben sei nun die folgende Ausgangssituation:



Die Problemstellung kann dann als ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ formuliert werden. Das Drücken eines Schalters $s_{i,j}$ wird über eine Variable $x_{i,j}$ repräsentiert. Leuchtet der Schalter auf, so ist sein Wert 1, ansonsten 0. In unserem Beispiel hat der Schalter $s_{1,1}$ (der Schalter in der 1. Zeile und der 1. Spalte) den Wert 0, da er nicht leuchtet. Sein Wert hängt von den Schaltern $s_{1,1}$, $s_{1,2}$ und $s_{2,1}$ ab, so dass gelten muss

$$x_{1,1} \ +_2 \ x_{1,2} \ +_2 \ x_{2,1} = 0.$$

Für den Schalter $s_{2,2}$ in der 2. Zeile und 2. Spalte muss gelten

$$x_{1,2} \ +_2 \ x_{2,1} \ +_2 \ x_{2,2} \ +_2 \ x_{2,3} \ +_2 \ x_{3,2} = 1,$$

da sein Wert auch vom Drücken der anliegenden Schalter $s_{1,2}$, $s_{2,1}$, $s_{2,3}$ und $s_{3,2}$ abhängt. Stellt man diese Gleichungen für alle Schalter auf, so erhält man ein lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}_2$), das mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst werden kann. Finden Sie eine Reihenfolge, mit der Schalter zu drücken sind, so dass am Ende kein Schalter mehr aufleuchtet.

Aufgabe 13.2 *Lösung linearer Gleichungssysteme* (5 Punkte)

Verwenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren, um die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}_7$ zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 3y & - & 2z & = 2 \\ 2x & + & 4y & & & = 3 \\ -3x & - & 5y & + & 2z & = 6 \end{array}$$

Aufgabe 13.3 *Invertieren von Matrizen* (5 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{R}$. Gegeben sei die $K^{4\times 4}$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die Inverse zu A.

Aufgabe 13.4 *Inverse von Matrizen*

Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ wird beim erfolgreichen Invertieren durch Gaußelimination eine linksinverse Matrix $U \in K^{n \times n}$ bestimmt, also eine für die gilt:

$$U \cdot A = E_n.$$

1. Zeigen Sie, dass allgemein für $A, B \in K^{n \times n}$ aus $B \cdot A = E_n$ auch $A \cdot B = E_n$ folgt.

2. Zeigen Sie, dass das Resultat aus Teil 1) nicht auf den Fall nichtquadratischer Matrizen übertragen werden kann. Hier folgt nämlich für $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$ aus $B \cdot A = E_n$ im allgemeinen nicht $A \cdot B = E_m$. Geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel dafür an.