lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 12

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 24.01.2014, 14:00 Uhr

Aufgabe 12.1 $\mathbb{R}$-*Vektorräume* (Präsenzaufgabe)

Es sei $V = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Hinweis: Die Schreibweise eines Vektors $\vec{x}$ als *transponierter Zeilenvektor* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ wird aus Platzgründen oft der äquivalenten Schreibweise als *Spaltenvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vorgezogen.

1. Beweisen Sie: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
2. Geben Sie ein Erzeugendensystem von V an. Weisen Sie nach, dass sich *genau* jeder Vektor $\vec{x} = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ mit $x+y+z = 0$ als Linearkombination von Vektoren des Erzeugendensystems darstellen lässt.
3. Stellen Sie V geeignet grafisch dar.

Aufgabe 12.2 *Matrizen* $(2 + 3 + 3 = 8$ Punkte$)$

1. Berechnen Sie das Produkt $A{\cdot}B$ der folgenden Matrizen. Berechnen Sie dann die Transponierte des Ergebnisses.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Auf Folie 321 (Foliensatz `lineare_algebra.pdf`) wurden *invertierbare* (oder auch *reguläre*) Matrizen erwähnt. Formal ist eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E^n$ gilt (hierbei ist E^n die $n \times n$-Einheitsmatrix über K).
   a) Sei $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?
   b) Berechnen Sie die Inverse B^{-1} der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, wenn der zugrundeliegende Körper $K = \mathbb{Z}_5$ ist.
3. Das Ergebnis der Transposition A^t einer $n \times m$-Matrix A über einem beliebigen Körper K lässt sich formal erfassen als

$$\forall\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.\ \left(A^t\right)_{ij} = A_{ji}.$$

   Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   a) Seien $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times k}$ $(n, m, k \in \mathbb{N})$. Dann gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
   b) Sei $A \in K^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ invertierbar. Dann ist auch A^t invertierbar, und es gilt $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

Aufgabe 12.3 *Erzeugendensysteme* (2 Punkte)

Sei V ein beliebiger Vektorraum, und sei $M \subseteq V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Erzeugendensysteme.

1. Ist $M' \subseteq M$ eine Teilmenge von M, so folgt $\langle M' \rangle \subseteq \langle M \rangle$.
2. $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$
3. M ist genau dann linear unabhängig, wenn M eine Basis von $\langle M \rangle$ ist.

Aufgabe 12.4 *Erzeugendensysteme* (Präsenzaufgabe)

1. Beweisen Sie Satz 4.5.1 unter Verwendung der Aussagen aus Aufgabe 12.3.
2. Sei V ein beliebiger Vektorraum.
   a) Seien $M, N \subseteq V$. Zeigen Sie: $\langle M \cup N \rangle = \langle M \rangle + \langle N \rangle$.[1]
   b) Sei $U \subset V$ linear unabhängig, und seien $M, N \subseteq U$ mit $M \cap N = \emptyset$. Zeigen Sie: $\langle M \rangle \cap \langle N \rangle = \{\vec{0}\}$

[1] Hierbei sei die Addition zweier Vektorräume definiert wie auf Folie 342 (Foliensatz `lineare_algebra.pdf`).