lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 11

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I" Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 17.01.2014, 14:00 Uhr

Aufgabe 11.1 *Körper* (4 Punkte)

Es sei $\langle K, \oplus, \odot \rangle$ ein Körper und M eine nichtleere Menge. K^M sei die Menge aller Abbildungen von M nach K. Auf der Menge K^M definieren wir eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ durch die folgende Festlegung:
$\forall f, g \in K^M, \ \forall m \in M :$

$$(f + g)(m) = f(m) \oplus g(m)$$

$$(f \cdot g)(m) = f(m) \odot g(m).$$

Zeigen Sie:

1. $\langle K^M, +, \cdot \rangle$ ist ein Ring.
2. $\langle K^M, +, \cdot \rangle$ ist genau dann ein Körper, wenn M einelementig ist.

Aufgabe 11.2 *Körper* (3 Punkte)

Gegeben sei die folgende Menge A von reellen 2×2-Matrizen:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie: $\langle A, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper

($+$ bezeichnet die Addition und $\cdot$ die Multiplikation von 2×2-Matrizen)

Hinweis:
Verwenden Sie auch, dass nach Satz 4.1.4 des Foliensatzes zur Linearen Algebra (Datei lineare_algebra.pdf) die $n \times n$-Matrizen zusammen mit $+$ und $\cdot$ einen Ring bilden.

Aufgabe 11.3 *K-Vektorraum* (3 Punkte)

Im Folgenden sind Körper K und Mengen M zusammen mit Abbildungen $\oplus : M \times M \to M$ und $\odot : K \times M \to M$ angegeben.
Prüfen Sie, ob M mit den Abbildungen $\oplus$ und $\odot$ ein K-Vektorraum ist:

1. a) $K = \mathbb{R}$ und $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}.\ \forall x.\ f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot (x-1)\}$

   b) $K = \mathbb{R}$ und $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x.\ f(-x) = -f(x)\}$

   $\oplus$ und $\odot$ sind hierbei folgendermaßen definiert:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(c \odot f)(x) = c \cdot f(x)\,.$$

2. $K = \mathbb{Z}_2$ und $M = \mathfrak{P}(X)$, wobei X eine beliebige nichtleere Menge ist.

   $\oplus : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ sei definiert durch:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

   $\odot : \mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ ist festgelegt durch

$$0 \cdot A = \emptyset \text{ und } 1 \cdot A = A.$$

Aufgabe 11.4 *Teilräume* (Präsenzaufgabe)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\}$ ist Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.
2. $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 0 \vee x_5 = 0\right\}$ ist Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^5$.
3. $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in (\mathbb{Z}_2)^5 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ enthält eine gerade Zahl von } 1\right\}$ ist Teilraum des Vektorraums $(\mathbb{Z}_2)^5$.
4. $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in (\mathbb{Z}_2)^5 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ enthält eine ungerade Zahl von } 1\right\}$ ist Teilraum des Vektorraums $(\mathbb{Z}_2)^5$.