lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 10

Bei Aufgabenblatt 10 handelt es sich um ein **Präsenzübungsblatt**, für das keine Abgabe erforderlich ist. Dennoch sollten Sie zur Vorbereitung auf den Übungstermin (KW 2, 2014) die Aufgaben zu Hause bearbeiten, sich zumindest aber mit den Aufgabenstellungen vertraut machen. Eine Bearbeitung in „Stillarbeit" im Rahmen des Übungstermins ist **nicht** vorgesehen!

Aufgabe 10.1 *Ringe*
Sei $\langle A, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in A$ gilt:

$$a \odot (-b) = (-a) \odot b = -(a \odot b) \text{ und } (-a) \odot (-b) = a \odot b.$$

Bemerkung: Die Schreibweise $-r$ wird hier und im Weiteren für das additiv Inverse eines Ringelements r verwendet.

Aufgabe 10.2 *Unterring und Nullring*

1. Sei $\langle A, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring und $B \subseteq A$. Zeigen Sie:
   $\langle \{a \in A \mid b \odot a = a \odot b \text{ für alle } b \in B\}, \oplus, \odot \rangle$ ist ein Unterring von $\langle A, \oplus, \odot \rangle$.
2. Ein Ring, der nur 0 enthält, heißt *Nullring*. Zeigen Sie:

   Ein Ring, in dem $0 = 1$ gilt, ist ein Nullring.

Aufgabe 10.3 *Ideal und Integritätsbereich*
Sei $\langle A, \oplus, \odot \rangle$ ein Integritätsbereich. Für $a \in A$ bezeichne (a) die Menge $(a) =_{df} \{a \odot x \mid x \in A\}$.
Zeigen Sie:

1. (a) ist ein Ideal von $\langle A, \oplus, \odot \rangle$. Man spricht hier auch von dem von a erzeugten *Hauptideal.*
2. $a|b$ genau dann, wenn $(a) \supseteq (b)$.
   Hierbei ist $a|b$ für Elemente a und b eines kommutativen Rings R definiert durch

$$a|b \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists r \in R.\, a \odot r = b.$$

Aufgabe 10.4 *Ringhomomorphismen auf* $\mathbb{Z}_n$
Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 2$ die identische Abbildung der einzige Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}_n$ nach $\mathbb{Z}_n$ ist.

Aufgabe 10.5 *Körper*
Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen Körper mit 4 Elementen gibt.

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die multiplikativ inversen Elemente.