

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rütthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung  
Mathematik für Informatiker 1  
Wintersemester 2013/14  
Übungsblatt 8

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.

Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

**Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!**

**Abgabefrist: 13.12.2013, 14:00 Uhr**

**Aufgabe 8.1** *Strukturtafeln und Gruppen*

(Präsenzaufgabe)

1. Im Folgenden sind die Additions- und Multiplikationstafeln für  $\mathbb{Z}_6$  nur unvollständig aufgeführt. Vervollständigen Sie diese.

Additionstafel:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3				
3	3	4				
4	4	5				
5	5	0				

Multiplikationstafel:

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2				
3	0	3				
4	0	4				
5	0	5				

2. Zeigen Sie:

$\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$  ist eine Gruppe.

**Aufgabe 8.2** *Permutationen, Zykelschreibweise*

(3+2 Punkte)

Wie bereits in der Vorlesung erwähnt, lassen sich Permutationen auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auch als Komposition von *Zykeln* schreiben (für eine genaue Definition der Semantik von Zykeln siehe Skript).

1. Gegeben seien die folgenden Permutationen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_6$  wie folgt:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  in Zykelschreibweise dar.

2. Berechnen Sie  $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ . Stellen Sie das Ergebnis ebenfalls in Zykelschreibweise dar.

**Aufgabe 8.3** *Gruppe und Gruppenhomomorphismus*

(3+2 Punkte)

$\langle G, \oplus \rangle$  sei eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: für alle  $a, b \in G$  gilt

$$(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$$

2. Sei  $\langle G, \oplus \rangle$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ ,  $\langle G', \oplus' \rangle$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e'$  und  $h : \langle G, \oplus \rangle \rightarrow \langle G', \oplus' \rangle$  ein Gruppenhomomorphismus von  $\langle G, \oplus \rangle$  nach  $\langle G', \oplus' \rangle$ , d.h. es gilt für alle  $a, b \in G$ :

$$h(a \oplus b) = h(a) \oplus' h(b).$$

Ferner lässt sich für einen solchen Gruppenhomomorphismus zeigen, dass für alle  $a \in G$

$$h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$$

gilt.

Als den *Kern* von  $h$  bezeichnet man die Menge derjenigen Elemente von  $G$ , die unter  $h$  auf das neutrale Element  $e'$  von  $G'$  abgebildet werden, also

$$\text{Kern}(h) =_{df} h^{-1}(e').$$

Beweisen Sie:  $h$  ist genau dann injektiv, wenn  $\text{Kern}(h) = \{e\}$  gilt.

**Aufgabe 8.4** *Untergruppenverband*

(Präsenzaufgabe)

1. Sei  $\langle G, \oplus \rangle$  eine Gruppe. Zeigen Sie:

Die Menge aller Untergruppen von  $\langle G, \oplus \rangle$  bildet mit der „ist Untergruppe von“-Relation  $\leq$  einen Verband  $\langle \mathcal{V}, \leq \rangle$ .

2. Zeigen Sie:

Die Funktion  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}$ , definiert durch  $f(U) = |U|$  ist ein Ordnungshomomorphismus.