lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 6

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I" Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 29.11.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 6.1 *Vollständige Induktion* (Präsenzaufgabe)

1. Dem bekannten Soziologen Prof. D. Bakel ist endlich der Durchbruch gelungen. Er hat nämlich einen formalen Beweis dafür gefunden, dass alle Menschen gleich sind. Hier ist seine Argumentation:

   Man beweist durch vollständige Induktion über n, dass in einer nichtleeren Menge von n Menschen alle gleich sind:

   Induktionsanfang: $n = 1$. Offensichtlich ist jeder Mensch mit sich selbst identisch!

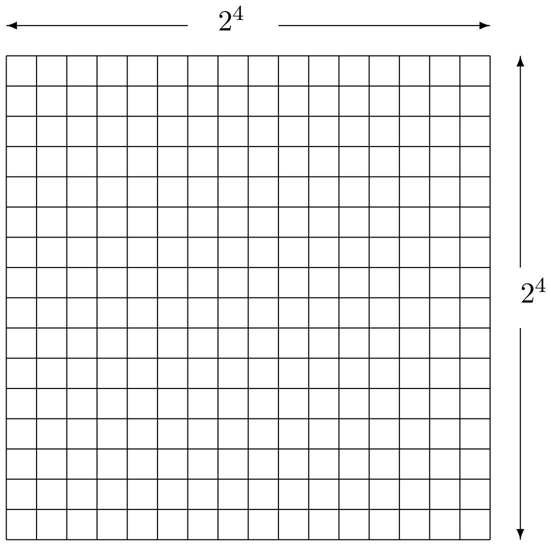
   Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Eine $n+1$-elementige Menschenmenge $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ unterteilt man dann in zwei Teilmengen der Größe n

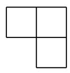
   $$\{m_1, .., m_n\} \quad \text{und} \quad \{m_2, .., m_{n+1}\}.$$

   Auf diese Teilmengen ist nun die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Folglich sind in den beiden Teilmengen alle Menschen gleich. Da insbesondere Mensch m_n in beiden Mengen enthalten ist, folgt aus der Transitivität von $=$ unmittelbar, dass alle Menschen gleich sind. q.e.d.

   Hat der Professor Sie überzeugt, oder finden Sie hier auch wieder ein Haar in der Suppe?

2. Wir betrachten ein quadratisches Gitternetz mit $2^n \times 2^n$ Feldern, etwa für $n = 4$:



Zeigen Sie, dass sich ein solches Gitternetz mit Winkeln des Form  pflastern lässt, so dass genau ein Feld übrig bleibt, sprich ungepflastert ist. Die Winkel können dabei beliebig gedreht verwendet werden.

Aufgabe 6.2 *Strukturelle Induktion* (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass für jeden Booleschen Term t ein semantisch äquivalenter Term t' existiert, der weder T noch F enthält. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

Aufgabe 6.3 *Verbände* (3+2 Punkte)
Sei M eine Menge.

1. Dann ist $(\mathbb{Z}^M, \sqsubseteq)$ ein Verband, wobei für $f, g \in \mathbb{Z}^M$ definiert ist:[1]

$$f \sqsubseteq g \ \Leftrightarrow_{df} \ \forall m \in M. f(m) \leq g(m).$$

2. Ist $(\mathbb{Z}^M, \sqsubseteq)$ auch ein vollständiger Verband. Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 6.4 *Verband und vollständiger Verband* (Präsenzaufgabe)
Eine Menge A von natürlichen Zahlen heißt *coendlich*, falls $\mathbb{N} \setminus A$ endlich ist.
Beweisen Sie:

1. $(\{A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ ist endlich oder coendlich}\}, \cap, \cup)$ ist ein algebraischer Verband.
2. $(\{A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ ist endlich oder coendlich}\}, \cap, \cup)$ ist kein vollständiger algebraischer Verband.

[1]Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}^M$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von M nach $\mathbb{Z}$.