lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

# Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 5

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

**Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!**

**Abgabefrist: 22.11.2013, 14:00 Uhr**

**Aufgabe 5.1** *Verallgemeinerte Induktion, vollständige Induktion* (Präsenzaufgabe)

1. Eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ von natürlichen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-3} + \frac{3}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-1} \text{ für } n \geq 3. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = fib(n)$.
   ($fib$ bezeichnet hierbei die Fibonacci-Funktion.)

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^2 + n + 2 \text{ ist gerade.}$$

**Aufgabe 5.2** *Verallgemeinerte Induktion, vollständige Induktion* (7 Punkte)

1. Zeigen Sie:

   Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ sind $fib(n)$ und $fib(n+1)$ teilerfremd, d.h. ihr größter gemeinsamer Teiler ist 1.

   Hinweis: Sehen Sie sich den Euklid'schen Algorithmus an.

2. Wir bezeichnen mit $\pi(n,k)$ für $k,n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der $k$-Partitionen, die aus einer $n$-elementigen Menge gebildet werden können (vgl. Übungsblatt4, Aufgabe 4.1; hier allerdings ohne die Einschränkung $1 \leq k \leq n$). Für den Spezialfall $n = k = 0$ wird $\pi(0,0) = 1$ gesetzt. Für die weiteren Werte gilt

$$\begin{aligned}
&\pi(n,0) = 0 \text{ für } n > 0 \\
&\pi(n,k) = 0 \text{ für } k > n \text{ und} \\
&\pi(n,k) = \pi(n-1,k-1) + k \cdot \pi(n-1,k) \ \text{ für } n \geq k \geq 1.
\end{aligned}$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

   a) $\forall n \in \mathbb{N}.\ \pi(n,n) = 1.$

   b) $\forall n \in \mathbb{N}.\ \pi(n+1,n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$

**Aufgabe 5.3** *Strukturelle Induktion* (3 Punkte)

Ein Binärbaum $T$ heißt Unterbaum eines Binärbaums $T'$ genau dann, wenn $T = T'$ oder $T$ Unterbaum eines (linken oder rechten) Teilbaums von $T'$ ist.
Die Höhe $h(T)$ eines Binärbaums $T$ ist folgendermaßen definiert:

- Für den leeren Binärbaum $T$ ist $h(T) = 0$.
- Für den Binärbaum $T = [T_1, T_2]$ ist $h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2))$.

Zeigen Sie:
Die Anzahl der Unterbäume eines Binärbaums $T$ ist $\leq 2^{h(T)+1} - 1$.

**Aufgabe 5.4** *Schubfachprinzip* (Präsenzaufgabe)

Gegeben sind 12 verschiedene zweistellige natürliche Zahlen $a_1 < \ldots < a_{12}$. Zeigen Sie:

Es gibt $a_i$ und $a_j$, $1 \leq i,j \leq 12$, mit $a_j > a_i$, so dass $a_j - a_i$ ein Vielfaches von 11 ist.