Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 4

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 15.11.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 4.1 *Induktives Definieren* (Präsenzaufgabe)
Geben Sie eine induktive Definition für die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge mit genau $1 \leq k \leq n$ Partitionsklassen an (vergleiche auch Abschnitt 3.3.1 im Buch). Erklären Sie Ihre Definition (ohne formalen Beweis).

Aufgabe 4.2 *Backus-Naur-Form (BNF)* (2+2 Punkte)
In Beispiel 5.9 in den Folien (Beispiel 4.9 im Buch) wird eine BNF für Dezimalzahlen angegeben.

1. Wir betrachten arithmetische Terme AT über der Variablenmenge $\mathrm{V} = \{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$, die durch folgende BNF gegeben sind:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{AT} \rangle &::= \langle \mathrm{Dezimalzahl} \rangle \mid \langle V \rangle \mid (-\langle \mathrm{AT} \rangle) \mid (\langle \mathrm{AT} \rangle + \langle \mathrm{AT} \rangle) \mid (\langle \mathrm{AT} \rangle * \langle \mathrm{AT} \rangle) \\ \langle \mathrm{V} \rangle &::= \mathrm{X} \mid \mathrm{Y} \mid \mathrm{Z} \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitungsfolge an, die aus $\langle \mathrm{AT} \rangle$ den arithmetischen Term

$$(((-\mathrm{X} + 5) * (\mathrm{X} + \mathrm{Y})) * (-(-3)))$$

ableitet.

2. Die BNF für Dezimalzahlen erlaubt das Ableiten von Zahlen mit führenden Nullen (z.B. 0000123). Wandeln Sie die BNF für Dezimalzahl so ab, dass weiterhin alle Dezimalzahlen erzeugt werden können, führende Nullen jedoch ausgeschlossen sind.

Aufgabe 4.3 *Partielle Ordnung, Quasiordnung* (2+2+2 Punkte)
Welche der folgenden Relationen R über der Menge A ist eine partielle Ordnung, welche eine Quasiordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $A = \{a, b, c\}$ und $R = \{(a, a), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.
2. $A = \mathbb{R}$ und $R = \{(x, y) \in A \times A \mid |x| \leq |y|\}$.
3. $A = \mathbb{Z}$ und $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ teilt y, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}.\ y = x \cdot k\}$.

Aufgabe 4.4 *Noethersche Induktion* (Präsenzaufgabe)
Die Teilbarkeitsrelation $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert durch $a \mid b \Leftrightarrow_{df} (\exists k \in \mathbb{N}.\ b = a \cdot k)$.

1. Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation eine Noethersche Ordnung ist.
2. Benutzen Sie die Tatsache, dass die Teilbarkeitsrelation eine Noethersche Ordnung ist, um die folgende Aussage zu beweisen: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ gilt, dass n entweder eine Primzahl ist oder sich als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}.\ (n \in \mathit{Prim}) \vee \left(\exists k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}.\ \exists p_1, \ldots, p_k \in \mathit{Prim}.\ n = \prod_{i=1}^{k} p_i\right).$$

   Erinnerung: Die Menge der Primzahlen ist definiert durch

$$\mathit{Prim} =_{df} \{p \in \mathbb{N} \mid p \neq 1 \wedge \{t \mid t \in \mathbb{N} \wedge t \mid p\} = \{1, p\}\},$$

   d.h. eine Zahl $n \geq 2$ ist prim, wenn sie nur von 1 und sich selbst geteilt wird.