Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 3

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I" Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 08.11.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 3.1 *Äquivalenzrelationen* (Präsenzaufgabe)

Über die Agenten, die in der Wumpus-Welt operieren, ist folgendes bekannt:
Seien A, B und C beliebige Agenten. Wenn Agent A sowohl Agent B als auch Agent C kennt, so kennt Agent B ebenfalls den Agenten C. Natürlich kennt jeder Agent auch sich selbst.

Zeigen Sie, dass die in der Wumpus-Welt zwischen Agenten bestehende binäre Relation „kennt" eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3.2 *Äquivalenzrelationen und Partitionen* (2+2+1 Punkte)

1. Betrachten Sie die Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, die wie folgt definiert ist:

$$xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \text{ ist gerade} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

   Beweisen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation.

2. Auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ sei die Funktion f wie folgt definiert:

$$f\colon \{0, \ldots, 4\} \to \mathbb{Z}, \qquad f(x) = x^2 - 4x$$

   Geben Sie die zugehörige Urbildpartition sowie die durch diese induzierte Äquivalenzrelation $\sim_f$ jeweils in expliziter Mengenschreibweise an (vgl. Buch S. 71).

3. Die in Aufgabenteil 2 berechnete Äquivalenzrelation wird nun durch Hinzufügen des Paares $(0,3)$ zur Relation $R =_{df} \sim_f \cup \{(0,3)\}$ erweitert. Wie im Abschnitt 3.4.3 (S. 75ff) des Buches beschrieben, lässt sich R durch Bildung der *reflexiv-transitiv-symmetrischen Hülle* wieder zu einer Äquivalenzrelation $R' \supseteq R$ ergänzen. Wie lautet die durch R' induzierte Partition $\{0, \ldots, 4\}/R'$?

Aufgabe 3.3 *Äquivalenzrelationen und Zahlbereiche* (3+2 Punkte)

1. Sei $\sim_1 \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ definiert durch

$$(a,b) \sim_1 (c,d) \Leftrightarrow_{df} a \cdot d = c \cdot b.$$

   Zeigen Sie, dass $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation ist.

   Bemerkung: Die Äquivalenzrelation $\sim_1$ spielt eine wichtige Rolle bei der Erweiterung des Zahlenbereiches der ganzen Zahlen auf den der rationalen Zahlen. Die Äquivalenzklassen von $\sim_1$ identifizieren nämlich wertegleiche Brüche wie $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$.

2. Sei $\sim_2 \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiert durch

$$(a,b) \sim_2 (c,d) \Leftrightarrow_{df} a + d = c + b.$$

   Zeigen Sie, dass auch $\sim_2$ eine Äquivalenzrelation ist. Überlegen Sie auch, wofür $\sim_2$ sinnvoll eingesetzt werden könnte.

Aufgabe 3.4 *Induktives Definieren* (Präsenzaufgabe)

1. In den Definitionen 4.2 sowie 4.3 (Buch S. 86f) wurden Addition und Multiplikation auf natürlichen Zahlen allein auf Basis der Peano-Axiome (Definition 4.1, S. 84) definiert. Auf S. 87 wurden weitere Operationen definiert, jedoch nur über das Produktzeichen bzw. die intuitive „...“-Schreibweise.

   Geben Sie analog zu Definition 4.2 bzw. 4.3 eine Definition an zur:

   a) *Exponentiation* natürlicher Zahlen, also zur Berechnung von n^m für $n, m \in \mathbb{N}$.
   b) *Fakultätsfunktion* $n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

2. In Beispiel 4.10 (S. 103f) finden Sie eine BNF für Boolesche Terme $\mathcal{BT}$ über einer Variablenmenge $\mathcal{V}$.

   a) Definieren Sie induktiv eine Funktion

$$\text{vars}\colon \mathcal{BT} \to \mathfrak{P}(\mathcal{V}),$$

   welche die in einem Term $t \in \mathcal{BT}$ vorkommenden Variablen angibt.

   b) Wenden Sie die im vorigen Aufgabenteil a) induktiv definierte Funktion vars *schrittweise* auf den Booleschen Term

$$(X \wedge (\mathsf{F} \vee (Y \wedge X)))$$

   an.