Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

6.2.2014

Thema heute

Thema heute: Übungsblatt 14

- Lineare Abbildungen
- Isomorphismen
- Kern, Bild, Homomorphiesatz
- Untervektorräume
- Matrizenrang, Dimensionssatz, Basiswechsel

Aufgabe 14.1: Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen Sie Ihre Antwort!

1. $V = \mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$, $f(x) =_{df} x + 1$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $f\colon V \to V$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$
3. V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei ℓ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14.1: Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen Sie Ihre Antwort!

1. $V = \mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$, $f(x) =_{df} x + 1$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $f\colon V \to V$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$
3. V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei ℓ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

Lineare Abbildung

Es seien U, V K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt linear gdw.

Aufgabe 14.1: Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen Sie Ihre Antwort!

1. $V = \mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$, $f(x) =_{df} x + 1$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $f\colon V \to V$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$
3. V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei ℓ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

Lineare Abbildung

Es seien U, V K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt linear gdw.

- $\forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in U : f(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = f(\vec{u_1}) + f(\vec{u_2})$
- $\forall \vec{u} \in U, s \in K : f(s \cdot \vec{u}) = s \cdot f(\vec{u})$

gilt.

Aufgabe 14.1: Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen Sie Ihre Antwort!

1. $V = \mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$, $f(x) =_{df} x + 1$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $f\colon V \to V$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$
3. V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei ℓ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

Lineare Abbildung

Es seien U, V K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt linear gdw.

- $\forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in U : f(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = f(\vec{u_1}) + f(\vec{u_2})$
- $\forall \vec{u} \in U, s \in K : f(s \cdot \vec{u}) = s \cdot f(\vec{u})$

gilt. ... oder abgekürzt: $\forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in U, s \in K : f(\vec{u_1} + s \cdot \vec{u_2}) = f(\vec{u_1}) + s \cdot f(\vec{u_2})$

Aufgabe 14.2: Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine fest gewählte reelle Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f_\alpha \colon V \to V, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass f_α eine lineare Abbildung ist.
2. Ist f_α ein Vektorraumisomorphismus? Beweisen bzw. widerlegen Sie.
3. Welche geometrische Bedeutung hat f_α?

Aufgabe 14.2: Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine fest gewählte reelle Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f_\alpha \colon V \to V, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass f_α eine lineare Abbildung ist.
2. Ist f_α ein Vektorraumisomorphismus? Beweisen bzw. widerlegen Sie.
3. Welche geometrische Bedeutung hat f_α?

Aufgabe 14.2: Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine fest gewählte reelle Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f_\alpha \colon V \to V, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass f_α eine lineare Abbildung ist.
2. Ist f_α ein Vektorraumisomorphismus? Beweisen bzw. widerlegen Sie.
3. Welche geometrische Bedeutung hat f_α?

Vektorraumisomorphismus

Ein Vektorraumisomorphismus ist eine bijektive lineare Abbildung.

Aufgabe 14.2: Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Lineare Abbildungen, Isomorphismen

Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine fest gewählte reelle Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f_\alpha \colon V \to V, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass f_α eine lineare Abbildung ist.
2. Ist f_α ein Vektorraumisomorphismus? Beweisen bzw. widerlegen Sie.
3. Welche geometrische Bedeutung hat f_α?

Vektorraumisomorphismus

Ein Vektorraumisomorphismus ist eine bijektive lineare Abbildung.
Alternative Charakterisierung: Ein Vektorraumisomorphismus ist eine lineare Abbildung $f \colon U \to V$ mit $\mathrm{Rang}(f) = \dim U (= \dim V)$.

Aufgabe 14.3: Kern, Bild, Homomorphiesatz

Kern, Bild, Homomorphiesatz

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y + z \\ 0 \\ -x + \frac{1}{3}z \\ -2x - y \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie den Kern von f und geben Sie eine Basis für Kern(f) an.
2. Welche Dimension hat das Bild von f?
3. Ist f injektiv?

zu Aufgabe 14.3: Kern, Bild, Homomorphiesatz

Dimensionssatz (Satz 12.3.3)

Es sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$$

zu Aufgabe 14.3: Kern, Bild, Homomorphiesatz

Dimensionssatz (Satz 12.3.3)

Es sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$$

Kern und Injektivität (Satz 12.3.2)

Es sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Es gilt: f ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ ist.

Aufgabe 14.4: Untervektorräume, Isomorphismen

Untervektorräume, Isomorphismen

Es seien $U =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ und
$W =_{df} \{s \cdot (1, 2, 3)^t + t \cdot (0, 1, 1)^t \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass U und W isomorph sind.

Aufgabe 14.4: Untervektorräume, Isomorphismen

Untervektorräume, Isomorphismen

Es seien $U =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ und
$W =_{df} \{s \cdot (1, 2, 3)^t + t \cdot (0, 1, 1)^t \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass U und W isomorph sind.

Isomorphie von Vektorräumen

Klar: U und W sind isomorph gdw. ein Isomorphismus (bijektive lineare Abbildung) zwischen U und W existiert.

Aufgabe 14.4: Untervektorräume, Isomorphismen

Untervektorräume, Isomorphismen

Es seien $U =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ und
$W =_{df} \{s \cdot (1, 2, 3)^t + t \cdot (0, 1, 1)^t \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass U und W isomorph sind.

Isomorphie von Vektorräumen

Klar: U und W sind isomorph gdw. ein Isomorphismus (bijektive lineare Abbildung) zwischen U und W existiert.
Alternativ (und viel einfacher): Endlichdimensionale Vektorräume über dem gleichen Körper K sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist

Aufgabe 14.4: Untervektorräume, Isomorphismen

Untervektorräume, Isomorphismen

Es seien $U =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ und
$W =_{df} \{s \cdot (1, 2, 3)^t + t \cdot (0, 1, 1)^t \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass U und W isomorph sind.

Isomorphie von Vektorräumen

Klar: U und W sind isomorph gdw. ein Isomorphismus (bijektive lineare Abbildung) zwischen U und W existiert.
Alternativ (und viel einfacher): Endlichdimensionale Vektorräume über dem gleichen Körper K sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist
Klar: Dann jeweils isomorph zu K^n

Aufgabe 14.5: Vektorräume, injektive und bijektive Abbildungen

Vektorräume, injektive und bijektive Abbildungen

Sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Wir betrachten die Menge $U_1 \times U_2$ und die darauf definierten Verknüpfungen $+\colon (U_1 \times U_2) \times (U_1 \times U_2) \to U_1 \times U_2$ sowie $\cdot\colon K \times (U_1 \times U_2) \to U_1 \times U_2$, definiert durch:

$$\begin{aligned} (\vec{u_1}, \vec{v_1}) + (\vec{u_2}, \vec{v_2}) &=_{df} (\vec{u_1} + \vec{u_2}, \vec{v_1} + \vec{v_2}) \\ s \cdot (\vec{u_1}, \vec{v_1}) &=_{df} (s \cdot \vec{u_1}, s \cdot \vec{v_1}) \end{aligned}$$

für alle $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in U$, $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, $s \in K$. Zeigen Sie:

1. $(U_1 \times U_2, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum
2. Die Funktion $f\colon U_1 \times U_2 \to V$, definiert durch $f(\vec{u}, \vec{v}) =_{df} 2\vec{u} + \vec{v}$ ist genau dann injektiv, wenn $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gilt.

zu Aufgabe 14.5: Vektorräume, injektive und bijektive Abbildungen

Definition Vektorraum

Sei K ein Körper. Eine Struktur V mit Verknüpfungen $+\colon V \times V \to V$ sowie $\cdot\colon K \times V \to V$ heißt Vektorraum gdw.

- $\langle V, +\rangle$ ist eine kommutative Gruppe
- $\forall \vec{v} \in V : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ ($1 \in K$ multiplikativ neutrales Element in K)
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, s \in K : s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}$
- $\forall \vec{v} \in V, s, s' \in K : (s + s')\vec{v} = s\vec{v} + s'\vec{v}$
- $\forall \vec{v} \in V, s, s' \in K : s \cdot (s' \cdot \vec{v}) = (s \cdot s') \cdot \vec{v}$

zu Aufgabe 14.5: Vektorräume, injektive und bijektive Abbildungen

Definition Vektorraum

Sei K ein Körper. Eine Struktur V mit Verknüpfungen $+ \colon V \times V \to V$ sowie $\cdot \colon K \times V \to V$ heißt Vektorraum gdw.

- $\langle V, + \rangle$ ist eine kommutative Gruppe
- $\forall \vec{v} \in V : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ ($1 \in K$ multiplikativ neutrales Element in K)
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, s \in K : s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}$
- $\forall \vec{v} \in V, s, s' \in K : (s + s')\vec{v} = s\vec{v} + s'\vec{v}$
- $\forall \vec{v} \in V, s, s' \in K : s \cdot (s' \cdot \vec{v}) = (s \cdot s') \cdot \vec{v}$

Lineare Abbildungen und Injektivität

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern trivial ist.

Aufgabe 14.6: Basiswechsel

Basiswechsel

Gegeben ist die 3×4-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

1. Berechnen Sie den Rang von A.
2. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_A)$ und verifizieren Sie den Dimensionssatz.
3. Bestimmen Sie die Matrix von φ_A bezüglich der Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Rang

Der Rang einer Matrix ist:

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Rang

Der Rang einer Matrix ist:

- die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spalten

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Rang

Der Rang einer Matrix ist:

- die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spalten
- Anzahl der nicht-Nullzeilen nach Anwendung der Gauß-Elimination

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Rang

Der Rang einer Matrix ist:

- die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spalten
- Anzahl der nicht-Nullzeilen nach Anwendung der Gauß-Elimination
- $\dim \mathrm{Bild}(\varphi_A)$

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Rang

Der Rang einer Matrix ist:

- die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spalten
- Anzahl der nicht-Nullzeilen nach Anwendung der Gauß-Elimination
- $\dim \mathrm{Bild}(\varphi_A)$

zur Dimensionsformel

Es gilt:

$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(\varphi_A) + \dim \mathrm{Bild}(\varphi_A) = \dim \mathrm{Kern}(\varphi_A) + \mathrm{Rang}(A)$$

(hier ist $V = \mathbb{R}^4$, $\dim V = 4$)

zu Aufgabe 14.6: Basiswechsel

zum Basiswechsel

Vorgehensweise zur Bestimmung von ${}_{B'}[\varphi_A]_B$:

- Matrix A ist hier für Einheitsbasen E_3 bzw E_4 gegeben (d.h. $A = {}_{E_3}[\varphi_A]_{E_4}$)
- Also zunächst Basistransformation(-smatrix berechnen): $B \to E_4$ (${}_{E_4}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B$), $E_3 \to B'$ (${}_{B'}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}$)
- Dann ist ${}_{B'}[\varphi_A]_B = {}_{B'}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[\varphi_A]_{E_4} \cdot {}_{E_4}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B = {}_{B'}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} \cdot A \cdot {}_{E_4}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B$