Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

16.1.2014

Thema heute

Thema heute: Algebra

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen, Ringe, Körper
- Unterstrukturen
- Homomorphismen

Beispiele für Halbgruppen/Monoide

Halbgruppe oder Monoid?

- A beliebige Menge, $\langle A^+, \cdot \rangle$
- A beliebige Menge, $\langle A^*, \cdot \rangle$
- $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$
- $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$

Unterstrukturen

Aufgabe

Für eine beliebige Menge A betrachten wir das freie Monoid über A $\langle A^*, \cdot \rangle$ mit neutralem Element ε. Ferner sei $a \in A$ ein beliebiges (aber festes) Element, und für $w \in A^*$ bezeichne $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen von a in w.

Sind die folgenden Unterstrukturen Untermonoide, Unterhalbgruppen oder keine Unterhalbgruppen?

1. $M_1 =_{df} \{w \in A^* \mid |w| \bmod 2 = 0\}$ (Wörter mit gerader Länge)
2. $M_2 =_{df} \{w \in A^* \mid |w| \bmod 2 \neq 0\}$ (Wörter mit ungerader Länge)
3. $M_3 =_{df} \{w \in A^* \mid \#_a(w) > 0\}$ (Wörter, in denen mindestens ein a vorkommt)
4. $M_4 =_{df} \{w \in A^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = 0\}$ (Wörter, in denen eine gerade Anzahl von as vorkommt)

Beispiele für Gruppen

Gruppe oder Monoid?

- $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$
- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
- A beliebige Menge, $\langle A^*, \cdot \rangle$

Monoide und Gruppen

Aufgabe

In einer Gruppe $\langle G, \oplus \rangle$ gilt die folgende Rechtskürzungsregel (Beweis s. Skript): Seien $a, b, c \in G$. Dann gilt

$$a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$$

Gilt diese im Allgemeinen auch, wenn $\langle G, \oplus \rangle$ nur ein Monoid ist?

Aufgabe

Für eine Gruppe $\langle G, \oplus \rangle$ besitzt jede Untergruppe $H \leq G$ das selbe neutrale Element e wie G. Gilt dies im Allgemeinen auch für (Unter-)Monoide?

Monoide und Gruppen (2)

Aufgabe

Es sei $\langle M, \oplus \rangle$ ein Monoid. Zeigen Sie: Die Teilmenge

$$M' =_{df} \{a \in M \mid a \text{ hat ein Inverses in } M\} \subseteq M$$

bildet mit $\oplus$ eine Gruppe.

Aufgabe

Es sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Die Verknüpfung $\tilde{\oplus} \colon G \times G \to G$ sei definiert als

$$\forall a, b \in G.\ a \tilde{\oplus} b =_{df} b \oplus a.$$

Zeigen Sie: Die Funktion $f \colon G \to G$, $f(a) = a^{-1}\ \forall a \in G$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\langle G, \oplus \rangle$ nach $\langle G, \tilde{\oplus} \rangle$.

Symmetrische Gruppe

Aufgabe

1. Sei h ein S_3-Automorphismus. Zeigen Sie: h^6 ist die Identität auf S_3.
2. Gilt dies auch für beliebige S_3-Homomorphismen?

Ringhomomorphismen

Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass $h_9 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_9$ mit $h_9(z) = z \bmod 9$ ein Ringepimorphismus von $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ nach $\langle \mathbb{Z}, +_9, \cdot_9 \rangle$ ist.
2. Es bezeichne $qs : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die einer natürlichen Zahl ihre Quersumme zuweist. Zeigen Sie:

$$h_9(n) = h_9(qs(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Die iterierte Quersumme $qs^*(n)$ einer Zahl n sei induktiv definiert durch:

$$qs^*(n) =_{df} \begin{cases} n & \text{falls } n \leq 9 \\ qs^*(qs(n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt: $h_9(n) = h_9(qs^*(n))$.

Integritätsbereiche und Körper

Aufgabe

Beweisen Sie: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.