Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

9.1.2014

Thema heute

Thema heute: Verbände

Verbände

Was ist ein Verband?

Verbände

Was ist ein Verband?

Ordnungstheoretisch

Eine halbgeordnete Menge $(V, \preceq)$ heißt (ordnungstheoretischer) Verband wenn zu je zwei Elementen $u, v \in V$ eine größte untere Schranke (Infimum) sowie eine kleinste obere Schranke (Supremum) existieren.

Verbände

Was ist ein Verband?

Ordnungstheoretisch

Eine halbgeordnete Menge $(V, \preceq)$ heißt (ordnungstheoretischer) Verband wenn zu je zwei Elementen $u, v \in V$ eine größte untere Schranke (Infimum) sowie eine kleinste obere Schranke (Supremum) existieren.

Algebraisch

Eine Struktur $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ heißt (algebraischer) Verband wenn die Verknüpfungen $\curlywedge$ und $\curlyvee$ assoziativ und kommutativ sind, und ferner die Absorptionsgesetze gelten.

Verbände

Was ist ein Verband?

Ordnungstheoretisch

Eine halbgeordnete Menge $(V, \preceq)$ heißt (ordnungstheoretischer) Verband wenn zu je zwei Elementen $u, v \in V$ eine größte untere Schranke (Infimum) sowie eine kleinste obere Schranke (Supremum) existieren.

Algebraisch

Eine Struktur $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ heißt (algebraischer) Verband wenn die Verknüpfungen $\curlywedge$ und $\curlyvee$ assoziativ und kommutativ sind, und ferner die Absorptionsgesetze gelten.

Ordnungstheoretischer vs. algebraischer Verband

Jeder algebraische Verband ist ein ordnungstheoretischer Verband (und umgekehrt) (Sätze 7.3 bzw. 7.5)

Verbände – Typische Aufgaben

Typische Aufgaben zum Thema Verbände:

- Sei V eine Menge und $\preceq \subseteq V \times V$ eine Relation mit $v_1 \preceq v_2 :\Leftrightarrow \ldots$. Weisen Sie nach, dass $(V, \preceq)$ ein [vollständiger] Verband ist.
- Sei V eine Menge, und seien $\curlywedge : V \times V \to V$ und $\curlyvee : V \times V \to V$ Operationen auf V. Weisen Sie nach, dass $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband ist.
- Sei $(V, \preceq)$ ein Verband, und sei $U =_{df} \ldots \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Weisen Sie nach, dass $(U, \preceq)$ ein Verband ist.
- Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband, und sei $U =_{df} \ldots \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Weisen Sie nach, dass $(U, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband ist.
- Sei $(V, \preceq)$ bzw. $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband. Ist dieser Verband distributiv?

Verbände – Ordnungstheoretischer Verbandsnachweis

Nachweisen, dass $(V, \preceq)$ ein (ordnungstheoretischer) Verband ist.

Herangehensweise

Was ist zu zeigen?

- $\preceq$ ist part. Ordnung auf V (!)
  - Bekannt ...
- $\forall u, v \in V . \inf\{u, v\}$ existiert
  - Nimm u, v als beliebig (aber fest) gewählt an.
  - Wähle dann ein Element w, welches das (vermeintliche) Infimum von u und v ist (Achtung: Kein Kochrezept, abhängig von $\preceq$. Allerdings Halbordnung $\preceq$ oft über andere Verbandsordnungen definiert ...)
  - Beweise die Infimumseigenschaft für w:
    - Beweis, dass w untere Schranke ist (oft einfach)
    - Beweis, dass w größte untere Schranke ist: Nimm an, dass untere Schranke w' mit $w' \not\preceq w$ existiert und zeige Widerspruch.
- $\forall u, v \in V . \sup\{u, v\}$ existiert.
  - Beweis analog zu inf

Verbände – Algebraischer Verbandsnachweise

Nachweisen, dass $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband ist.

Herangehensweise

Was ist zu zeigen?

- Verbandseigenschaften von $\curlywedge$ und $\curlyvee$:
  - $\curlywedge, \curlyvee$ sind assoziativ
  - $\curlywedge, \curlyvee$ sind kommutativ
  - Es gelten die Absorptionsgesetze für $\curlywedge, \curlyvee$

Verbandsnachweis – Beispiele

Beispielaufgabe – ordnungstheoretisch

Seien $(U, \preceq_U)$ und $(V, \preceq_V)$ (vollständige) Verbände. Auf $U \times V$ sei die Relation $\preceq_{U \times V}$ wie folgt definiert:

$$(u, v) \preceq_{U \times V} (u', v') :\Leftrightarrow u \preceq_U u' \land v \preceq_V v'$$

Zeigen Sie: $(U \times V, \preceq_{U \times V})$ ist ebenfalls ein (vollständiger) Verband.

Verbandsnachweis – Beispiele

Beispielaufgabe – ordnungstheoretisch

Seien $(U, \preceq_U)$ und $(V, \preceq_V)$ (vollständige) Verbände. Auf $U \times V$ sei die Relation $\preceq_{U\times V}$ wie folgt definiert:

$$(u, v) \preceq_{U\times V} (u', v') :\Leftrightarrow u \preceq_U u' \wedge v \preceq_V v'$$

Zeigen Sie: $(U \times V, \preceq_{U\times V})$ ist ebenfalls ein (vollständiger) Verband.

Beispielaufgabe – algebraisch

Seien $(U, \curlywedge_U, \curlyvee_U)$ und $(V, \curlywedge_V, \curlyvee_V)$ Verbände. Die Operationen $\curlywedge_{U\times V}$ und $\curlyvee_{U\times V}$ seien als binäre innere Verknüpfungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(u, v) \curlywedge_{U\times V} (u', v') &=_{df} (u \curlywedge_U u', v \curlywedge_V v')\\ (u, v) \curlyvee_{U\times V} (u', v') &=_{df} (u \curlyvee_U u', v \curlyvee_V v')\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $(U \times V, \curlywedge_{U\times V}, \curlyvee_{U\times V})$ ist ebenfalls ein Verband.

Verbände – Teilverband

Sei $(V, \preceq)$ ein Verband. Sei $U =_{df} \ldots \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Weisen Sie nach, dass $(U, \preceq)$ ein (vollständiger) Verband ist.

Herangehensweise

Im Prinzip wie Verbandsnachweis, aber:

- $\preceq$ ist part. Ordnung auf V, also insbesondere auch auf U.
- Infima und Suprema müssen bzgl. $\preceq$ in U existieren.
- Achtung: Infima und Suprema für Elemente $u, v \in V$ können in U anders sein!
- Oft: Infima/Suprema in V lassen sich eindeutig ergänzen zu/reduzieren auf Elemente in U.

Beispiel: Menge $T(M)$ der transitiven Relationen auf einer Menge M mit Inklusionsbeziehung $\subseteq$ (Teilverband von $(\mathfrak{P}(M \times M), \subseteq)$).

Verbände – Unterverband

Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband. Sei $U =_{df} \ldots \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Weisen Sie nach, dass $(U, \curlywedge, \curlyvee)$ ebenfalls ein Verband ist.

Herangehensweise

Wichtiges Prinzip: Abschlussbeweis!

- Assoziativität, Kommutativität und Absorption gelten für $\curlywedge$ und $\curlyvee$ auf ganz V, also insbesondere auch auf U.
- Aber: Definitionsbereich ist $\curlywedge : V \times V \to V$ ($\curlyvee$ analog)
- Zu zeigen: Abgeschlossenheit, d.h.: für alle $u, v \in U$ ist auch $u \curlywedge v \in U$ ($\curlyvee$ analog)

Beispiel: Menge der endlichen und co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ (Unterverband von $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$).

Verbände – Distributivität

Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein Verband. Ist dieser Verband distributiv?

Herangehensweise

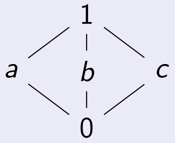
Distributivität bedeutet:

$$\forall u, v, w \in V . u \curlywedge (v \curlyvee w) = (u \curlywedge v) \curlyvee (u \curlywedge w)$$

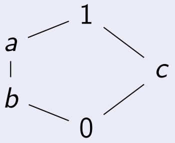
- Möglichkeit 1: Über die Definition von $\curlywedge$ und $\curlyvee$ (axiomatisch) nachweisen, dass dies gilt bzw. Elemente u, v, w finden, für die das nicht gilt.
- Möglichkeit 2: Wenn ein endlicher Verband explizit (z.B. als Hasse-Diagramm) gegeben ist: ausprobieren oder (eleganter) prüfen, ob ein **kleinster nichtdistributiver Verband** ein Unterverband ist

Kleinste nichtdistributive Verbände

Kleinste nichtdistributive Verbände



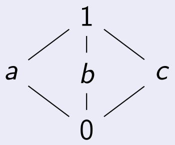
$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge 1 \\ &= a \\ (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= 0 \vee 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



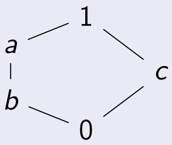
$$\begin{aligned} b \curlyvee (a \curlywedge c) &= b \curlyvee 0 \\ &= b \\ (b \curlyvee a) \curlywedge (b \curlyvee c) &= a \curlywedge 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Kleinste nichtdistributive Verbände

Kleinste nichtdistributive Verbände



$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge 1 \\ &= {\color{red}a} \\ (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= 0 \vee 0 \\ &= {\color{red}0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b \curlyvee (a \curlywedge c) &= b \curlyvee 0 \\ &= {\color{red}b} \\ (b \curlyvee a) \curlywedge (b \curlyvee c) &= a \curlywedge 1 \\ &= {\color{red}a} \end{aligned}$$

Jeder nichtdistributive Verband enthält einen dieser beiden Verbände als Unterverband!

Verbände – Weitere Beispiele

- Sei $(A, \preceq_A)$ ein Verband und M eine Menge. Zeigen Sie: $(A^M, \preceq_{A^M})$ ist ebenfalls ein Verband, wobei $\preceq \subseteq A^M \times A^M$ wie folgt definiert sei:

$$f \preceq_{A^M} g \Leftrightarrow_{df} \forall m \in M. f(m) \preceq g(m)$$

- Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein distributiver Verband und sei $v \in V$ beliebig. Es sei die Funktion $f_v \colon V \to V$ definiert als

$$f_v(u) =_{df} u \curlywedge v$$

  Zeigen Sie: $(Bild(f_v), \curlywedge, \curlyvee)$ ist ein Verband.
- Sei $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ ein distributiver Verband und sei $v \in V$ beliebig. Es sei die Funktion $g_v \colon V \to V$ definiert als

$$g_v(u) =_{df} u \curlyvee v$$

  Zeigen Sie: $(Bild(g_v), \curlywedge, \curlyvee)$ ist ein Verband.
- Sei $(V, \preceq)$ ein distributiver Verband und seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \preceq v_2$. Zeigen Sie: Die Menge $\{x \mid v_1 \preceq x \preceq v_2\}$ bildet mit $\preceq$ einen Verband.