Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

19.12.2013

Themen heute

Zur Auswahl . . .

- Besprechung der Probeklausur
- ~~Verbände~~
- ~~Gruppen und Ringe~~

Probeklausur

Probeklausur

- 6 Aufgaben, insg. 60 Punkte („echte" Klausur: insg. 100 Punkte)
- „Besprechung" heißt:
  - Kein Lösen/Vorrechnen der Aufgaben!
  - Diskussion der Aufgabenstellung: Was ist gefragt? Auf welche Weise kann/muss die Aufgabe gelöst werden? Welche Lösungsansätze gibt es?

Probeklausur – Aufgabe 1

Aufgabe 9.1.1

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

Probeklausur – Aufgabe 1

Aufgabe 9.1.1

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big)$$

Probeklausur – Aufgabe 1

Aufgabe 9.1.1

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

$$\begin{aligned}
\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad &\equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\big(\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big) && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg\mathcal{A} \vee \big(\neg\mathcal{B} \wedge \neg\neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big) && \text{(De Morgan)} \\
&\vdots \\
&\equiv
\end{aligned}$$

Probeklausur – Aufgabe 1

Aufgabe 9.1.1

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

$$\begin{aligned}
\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad &\equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\big(\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big) && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg\mathcal{A} \vee \big(\neg\mathcal{B} \wedge \neg\neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big) && \text{(De Morgan)} \\
&\vdots \\
&\equiv \big(\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})\big)
\end{aligned}$$

Probeklausur – Aufgabe 1 (Forts.)

Aufgabe 9.1.2

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

Zeigen Sie die semantische Äquivalenz aus Teil 1) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

Wie sieht Wahrheitstafel optimalerweise aus?

Probeklausur – Aufgabe 1 (Forts.)

Aufgabe 9.1.2

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

Zeigen Sie die semantische Äquivalenz aus Teil 1) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

Wie sieht Wahrheitstafel optimalerweise aus?

- Eine Spalte je „Elementaraussage" $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$
- Eine Spalte je Teilausdruck ($\neg A$, $C \vee \neg A$, etc.). Tipp: Eigene Bezeichner (z.B. $X \equiv_{df} \ldots$) für mehrfach vorkommende Teilausdrücke einführen
- Zu Gesamtausdrücken $\neg\Big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))\Big)$ bzw. $\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ korrespondierende Spalten hervorheben (diese Spalten müssen zeilenweise gleich sein)
- 3 Elementaraussagen $\Rightarrow 2^3 = 8$ Zeilen. Tipp: Nach Wahrheitswert für $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ systematisch aufzählen (fff, ffw, fwf, fww, ...)

Probeklausur – Aufgabe 2

Aufgabe 9.2.1

Es sei die Menge $M =_{df} \{a, e, k, y\}$ gegeben. Wir definieren die Relation

$$R =_{df} \{(a, a), (a, y), (e, e), (k, a), (k, k), (k, y), (y, a), (y, y)\}.$$

1. Ist R eine Quasiordnung? Ist R eine partielle Ordnung? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.
2. Geben Sie R^{-1} und $R \cup R^{-1}$ an.
3. Ist $R \cup R^{-1}$ eine partielle Ordnung? Ist $R \cup R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.

Probeklausur – Aufgabe 2

Aufgabe 9.2.1

Es sei die Menge $M =_{df} \{a, e, k, y\}$ gegeben. Wir definieren die Relation

$$R =_{df} \{(a, a), (a, y), (e, e), (k, a), (k, k), (k, y), (y, a), (y, y)\}.$$

1. Ist R eine Quasiordnung? Ist R eine partielle Ordnung? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.
2. Geben Sie R^{-1} und $R \cup R^{-1}$ an.
3. Ist $R \cup R^{-1}$ eine partielle Ordnung? Ist $R \cup R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.

1. Quasiordnung: Reflexivität, Transitivität; part. Ordnung: zusätzlich Antisymmetrie (d.h.: keine Quasiordnung $\Rightarrow$ keine part. Ordnung)

Probeklausur – Aufgabe 2

Aufgabe 9.2.1

Es sei die Menge $M =_{df} \{a, e, k, y\}$ gegeben. Wir definieren die Relation

$$R =_{df} \{(a, a), (a, y), (e, e), (k, a), (k, k), (k, y), (y, a), (y, y)\}.$$

1. Ist R eine Quasiordnung? Ist R eine partielle Ordnung? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.
2. Geben Sie R^{-1} und $R \cup R^{-1}$ an.
3. Ist $R \cup R^{-1}$ eine partielle Ordnung? Ist $R \cup R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.

1. Quasiordnung: Reflexivität, Transitivität; part. Ordnung: zusätzlich Antisymmetrie (d.h.: keine Quasiordnung $\Rightarrow$ keine part. Ordnung)
2. R^{-1}: alle Paare umdrehen, also $R^{-1} = \{(a, a), (y, a), \ldots\}$

Probeklausur – Aufgabe 2

Aufgabe 9.2.1

Es sei die Menge $M =_{df} \{a, e, k, y\}$ gegeben. Wir definieren die Relation

$$R =_{df} \{(a, a), (a, y), (e, e), (k, a), (k, k), (k, y), (y, a), (y, y)\}.$$

1. Ist R eine Quasiordnung? Ist R eine partielle Ordnung? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.
2. Geben Sie R^{-1} und $R \cup R^{-1}$ an.
3. Ist $R \cup R^{-1}$ eine partielle Ordnung? Ist $R \cup R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.

---

1. Quasiordnung: Reflexivität, Transitivität; part. Ordnung: zusätzlich Antisymmetrie (d.h.: keine Quasiordnung $\Rightarrow$ keine part. Ordnung)
2. R^{-1}: alle Paare umdrehen, also $R^{-1} = \{(a, a), (y, a), \ldots\}$
3. $R \cup R^{-1}$: überlegen, unter welchem Namen $R \cup R^{-1}$ auch eingeführt wurde, ansonsten Vorgehen wie bei 1.

Probeklausur – Aufgabe 2 (Forts.)

Aufgabe 9.2.2

Wir definieren die Relation $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$a \; S \; b \Leftrightarrow_{df} a - b \text{ ist durch 7 teilbar.}$$

Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
Erinnerung: Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist durch eine Zahl $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = k \cdot y$ gilt.

Probeklausur – Aufgabe 2 (Forts.)

Aufgabe 9.2.2

Wir definieren die Relation $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$a \; S \; b \Leftrightarrow_{df} a - b \text{ ist durch 7 teilbar.}$$

Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
Erinnerung: Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist durch eine Zahl $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = k \cdot y$ gilt.

- Äquivalenzrelation: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

Probeklausur – Aufgabe 2 (Forts.)

Aufgabe 9.2.2

Wir definieren die Relation $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$a \; S \; b \Leftrightarrow_{df} a - b \text{ ist durch 7 teilbar.}$$

Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
Erinnerung: Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist durch eine Zahl $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = k \cdot y$ gilt.

- Äquivalenzrelation: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität
- Beweisschema:
  - **Reflexivität:** Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zu zeigen ist nun, dass aSa gilt. ...
  - **Symmetrie:** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und gelte aSb. Zu zeigen ist nun, dass dann auch bSa gilt. ...
  - **Transitivität:** Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und gelte aSb sowie bSc. Zu zeigen ist nun, dass dann auch aSc gilt. ...

Probeklausur – Aufgabe 3

Aufgabe 9.3.1

Zeigen Sie die folgende Aussage mit verallgemeinerter Induktion. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Erinnerung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat bspw. die Zahl 108 die Quersumme $1 + 0 + 8 = 9$, und in der Tat sind sowohl 9 als auch 108 durch 3 teilbar.
Erinnerung 2: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch eine Zahl $t \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = t \cdot k$ gilt.

Probeklausur – Aufgabe 3

Aufgabe 9.3.1

Zeigen Sie die folgende Aussage mit verallgemeinerter Induktion. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Erinnerung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat bspw. die Zahl 108 die Quersumme $1 + 0 + 8 = 9$, und in der Tat sind sowohl 9 als auch 108 durch 3 teilbar.
Erinnerung 2: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch eine Zahl $t \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = t \cdot k$ gilt.

- Verallgemeinerte Induktion: Im Induktionsschritt (Beweis der Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$) annehmen, dass $\forall m < n.\ m|3 \Leftrightarrow qs(m)|3$ gilt.

Probeklausur – Aufgabe 3

Aufgabe 9.3.1

Zeigen Sie die folgende Aussage mit verallgemeinerter Induktion. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Erinnerung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat bspw. die Zahl 108 die Quersumme $1 + 0 + 8 = 9$, und in der Tat sind sowohl 9 als auch 108 durch 3 teilbar.
Erinnerung 2: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch eine Zahl $t \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = t \cdot k$ gilt.

- Verallgemeinerte Induktion: Im Induktionsschritt (Beweis der Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$) annehmen, dass $\forall m < n.\, m|3 \Leftrightarrow qs(m)|3$ gilt.
- Was könnten Basisfälle sein? Tipp: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Aussage trivial (z.B. weil $n = qs(n)$ gilt ...)?

Probeklausur – Aufgabe 3 (Forts.)

Aufgabe 9.3.2

Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle, \langle T\rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T\rangle$ ist:

$$\langle A\rangle ::= 11, \quad \langle E\rangle ::= 101, \quad \langle H\rangle ::= 010, \quad \langle M\rangle ::= 00$$
$$\langle T\rangle ::= \langle M\rangle\langle A\rangle\langle T\rangle \mid \langle H\rangle\langle E\rangle$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T\rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

Probeklausur – Aufgabe 3 (Forts.)

Aufgabe 9.3.2

Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle, \langle T\rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T\rangle$ ist:

$$\langle A\rangle ::= 11, \quad \langle E\rangle ::= 101, \quad \langle H\rangle ::= 010, \quad \langle M\rangle ::= 00$$
$$\langle T\rangle ::= \langle M\rangle\langle A\rangle\langle T\rangle \mid \langle H\rangle\langle E\rangle$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T\rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

- Mag kompliziert aussehen: verallg. BNF-Induktion, d.h. eine Induktionsbehauptung pro Nichtterminalsymbol? (Buch, Abschnitt 5.4.7)

Probeklausur – Aufgabe 3 (Forts.)

Aufgabe 9.3.2

Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle, \langle T\rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T\rangle$ ist:

$$\langle A\rangle ::= 11, \quad \langle E\rangle ::= 101, \quad \langle H\rangle ::= 010, \quad \langle M\rangle ::= 00$$
$$\langle T\rangle ::= \langle M\rangle\langle A\rangle\langle T\rangle \mid \langle H\rangle\langle E\rangle$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T\rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

- Mag kompliziert aussehen: verallg. BNF-Induktion, d.h. eine Induktionsbehauptung pro Nichtterminalsymbol? (Buch, Abschnitt 5.4.7)
- Viel einfacher: Betrachte Nichtterminalsymbole $\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle$ genauer.

Probeklausur – Aufgabe 3 (Forts.)

Aufgabe 9.3.2

Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle, \langle T\rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T\rangle$ ist:

$$\langle A\rangle ::= 11, \quad \langle E\rangle ::= 101, \quad \langle H\rangle ::= 010, \quad \langle M\rangle ::= 00$$
$$\langle T\rangle ::= \langle M\rangle\langle A\rangle\langle T\rangle \mid \langle H\rangle\langle E\rangle$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T\rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

- Mag kompliziert aussehen: verallg. BNF-Induktion, d.h. eine Induktionsbehauptung pro Nichtterminalsymbol? (Buch, Abschnitt 5.4.7)
- Viel einfacher: Betrachte Nichtterminalsymbole $\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle$ genauer.
- Vereinfachte BNF: $\langle T\rangle ::= 0011\langle T\rangle \mid 010101$

Probeklausur – Aufgabe 3 (Forts.)

Aufgabe 9.3.2

Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle, \langle T\rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T\rangle$ ist:

$$\langle A\rangle ::= 11, \quad \langle E\rangle ::= 101, \quad \langle H\rangle ::= 010, \quad \langle M\rangle ::= 00$$
$$\langle T\rangle ::= \langle M\rangle\langle A\rangle\langle T\rangle \mid \langle H\rangle\langle E\rangle$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T\rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

- Mag kompliziert aussehen: verallg. BNF-Induktion, d.h. eine Induktionsbehauptung pro Nichtterminalsymbol? (Buch, Abschnitt 5.4.7)
- Viel einfacher: Betrachte Nichtterminalsymbole $\langle A\rangle, \langle E\rangle, \langle H\rangle, \langle M\rangle$ genauer.
- Vereinfachte BNF: $\langle T\rangle ::= 0011\langle T\rangle \mid 010101$
- Beweisschema: Ein Fall pro (effektiver) Produktionsregel
  - **Fall 1:** Sei $w = 010101$. ...
  - **Fall 2:** Sei w ein aus der Regel $\langle T\rangle ::= 0011\langle T\rangle$ erzeugter Bitstring (also $w = 0011w'$, wobei w' aus $\langle T\rangle$ erzeugt wurde). ...

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

- Was ist hier zu prüfen? $\subseteq$-Ordnung ist bekannt (und ist part. Ordnung)

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

- Was ist hier zu prüfen? $\subseteq$-Ordnung ist bekannt (und ist part. Ordnung)
- Klar: Supremum in $(T(M), \subseteq)$ ist mindestens so groß wie im Potenzmengenverband $(\mathcal{P}(M \times M), \subseteq)$

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

- Was ist hier zu prüfen? $\subseteq$-Ordnung ist bekannt (und ist part. Ordnung)
- Klar: Supremum in $(T(M), \subseteq)$ ist mindestens so groß wie im Potenzmengenverband $(\mathcal{P}(M \times M), \subseteq)$
- Mindestens: $T(M)$ enthält weniger Elemente als Potenzmenge. Für $R_1, R_2 \in T(M)$ muss nicht unbedingt $R_1 \cup R_2 \in T(M)$ gelten (aber es kann bzgl. $\subseteq$ keine obere Schranke geben, die kleiner als $R_1 \cup R_2$ ist)

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

- Was ist hier zu prüfen? $\subseteq$-Ordnung ist bekannt (und ist part. Ordnung)
- Klar: Supremum in $(T(M), \subseteq)$ ist mindestens so groß wie im Potenzmengenverband $(\mathcal{P}(M \times M), \subseteq)$
- Mindestens: $T(M)$ enthält weniger Elemente als Potenzmenge. Für $R_1, R_2 \in T(M)$ muss nicht unbedingt $R_1 \cup R_2 \in T(M)$ gelten (aber es kann bzgl. $\subseteq$ keine obere Schranke geben, die kleiner als $R_1 \cup R_2$ ist)
- Fragestellung: Wenn $R_1 \cup R_2 \notin T(M)$, lässt es sich eindeutig zu einer kleinsten oberen Schranke in $T(M)$ ergänzen?

Probeklausur – Aufgabe 4

Aufgabe 9.4.1

Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M. In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.

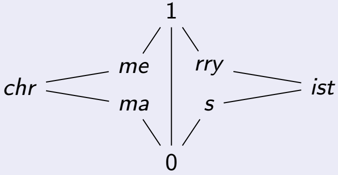
Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

- Was ist hier zu prüfen? $\subseteq$-Ordnung ist bekannt (und ist part. Ordnung)
- Klar: Supremum in $(T(M), \subseteq)$ ist mindestens so groß wie im Potenzmengenverband $(\mathcal{P}(M \times M), \subseteq)$
- Mindestens: $T(M)$ enthält weniger Elemente als Potenzmenge. Für $R_1, R_2 \in T(M)$ muss nicht unbedingt $R_1 \cup R_2 \in T(M)$ gelten (aber es kann bzgl. $\subseteq$ keine obere Schranke geben, die kleiner als $R_1 \cup R_2$ ist)
- Fragestellung: Wenn $R_1 \cup R_2 \notin T(M)$, lässt es sich eindeutig zu einer kleinsten oberen Schranke in $T(M)$ ergänzen?
- Analog für Infimum $\cap$.

Probeklausur – Aufgabe 4 (Forts.)

Aufgabe 9.4.2

Wir definieren die Menge $V =_{df} \{0, chr, ist, ma, me, rry, s, 1\}$, die acht verschiedene Symbole enthält. Auf dieser Menge V legen wir durch folgendes Hasse-Diagramm eine Ordnung so fest, dass V mit dieser Ordnung einen Verband bildet:

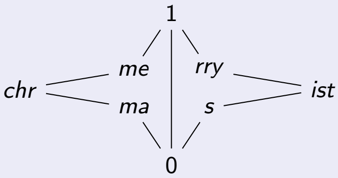


Ist dieser Verband distributiv?

Probeklausur – Aufgabe 4 (Forts.)

Aufgabe 9.4.2

Wir definieren die Menge $V =_{df} \{0, chr, ist, ma, me, rry, s, 1\}$, die acht verschiedene Symbole enthält. Auf dieser Menge V legen wir durch folgendes Hasse-Diagramm eine Ordnung so fest, dass V mit dieser Ordnung einen Verband bildet:



Ist dieser Verband distributiv?

- In distributivem Verband gelten Distributivgesetze
  - $\forall x, y, z \in V \,.\, x \curlywedge (y \curlyvee z) = (x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z)$
  - $\forall x, y, z \in V \,.\, x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$

Probeklausur – Aufgabe 5

Aufgabe 9.5.1

Sei $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$ Monoid mit neutralem Element e_1, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$ Monoid mit neutralem Element e_2 und $h : \langle M_1, \oplus_1 \rangle \to \langle M_2, \oplus_2 \rangle$ ein Monoidhomomorphismus. Beweisen Sie:[a]

$$h \ \text{ist injektiv} \quad \Rightarrow \quad Kern(h) = \{e_1\}.$$

[a] Wie üblich gilt $Kern(h) =_{df} \{m \in M_1 \mid h(m) = e_2\}$.

Probeklausur – Aufgabe 5

Aufgabe 9.5.1

Sei $\langle M_1, \oplus_1\rangle$ Monoid mit neutralem Element e_1, $\langle M_2, \oplus_2\rangle$ Monoid mit neutralem Element e_2 und $h : \langle M_1, \oplus_1\rangle \to \langle M_2, \oplus_2\rangle$ ein Monoidhomomorphismus. Beweisen Sie:[a]

$$h \text{ ist injektiv} \quad \Rightarrow \quad Kern(h) = \{e_1\}.$$

[a] Wie üblich gilt $Kern(h) =_{df} \{m \in M_1 \mid h(m) = e_2\}$.

- Implikation: Beweis z.B. per Kontraposition

$$Kern(h) \neq \{e_1\} \Rightarrow h \text{ ist nicht injektiv}$$

Probeklausur – Aufgabe 5

Aufgabe 9.5.1

Sei $\langle M_1, \oplus_1\rangle$ Monoid mit neutralem Element e_1, $\langle M_2, \oplus_2\rangle$ Monoid mit neutralem Element e_2 und $h : \langle M_1, \oplus_1\rangle \to \langle M_2, \oplus_2\rangle$ ein Monoidhomomorphismus. Beweisen Sie:[a]

$$h \text{ ist injektiv } \Rightarrow Kern(h) = \{e_1\}.$$

[a] Wie üblich gilt $Kern(h) =_{df} \{m \in M_1 \mid h(m) = e_2\}$.

- Implikation: Beweis z.B. per Kontraposition

$$Kern(h) \neq \{e_1\} \Rightarrow h \text{ ist nicht injektiv}$$

- Sei $Kern(h) \neq \{e_1\}$, also $Kern(h) = \emptyset$ oder es gibt $a \in Kern(h)$ mit $a \neq e_1$. Zu zeigen ist nun, dass daraus folgt: es existieren $x, y \in M_1$ mit $h(x) = h(y)$.

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

- Aufgabenstellung sorgfältig lesen! Was ist gesucht?

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

- Aufgabenstellung sorgfältig lesen! Was ist gesucht?
  - Monoide $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

- Aufgabenstellung sorgfältig lesen! Was ist gesucht?
  - Monoide $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$
  - Monoidhomomorphismus $h \colon M_1 \to M_2$, so dass

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

- Aufgabenstellung sorgfältig lesen! Was ist gesucht?
    - Monoide $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$
    - Monoidhomomorphismus $h \colon M_1 \to M_2$, so dass
        - h **nicht** injektiv ist

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.2

Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.

- Aufgabenstellung sorgfältig lesen! Was ist gesucht?
  - Monoide $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$
  - Monoidhomomorphismus $h\colon M_1 \to M_2$, so dass
    - ⋆ h **nicht** injektiv ist
    - ⋆ aber $Kern(h) = \{e_1\}$

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.3

Es sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \to G$ durch

$$a \odot b =_{df} a \oplus x \oplus b$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist.
2. Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle für $\odot$ konkret für das Beispiel $\langle G, \oplus \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$.

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.3

Es sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \to G$ durch

$$a \odot b =_{df} a \oplus x \oplus b$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist.
2. Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle für $\odot$ konkret für das Beispiel $\langle G, \oplus \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$.

1. Nachweisen, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist: Assoziativität, neutrales Element, inverses Element
   - Schema:
     - **Assoziativität:** Seien $a, b, c \in G$ beliebig. Zu zeigen ist nun, dass $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ gilt. ...
     - **Neutrales Element:** Es ist ein Element $e \in G$ gesucht, so dass für jedes $a \in G$ $a \odot e = a$ gilt ($a \odot e = a \oplus x \oplus e$). ...
     - **Inverse Elemente:** Zu einem beliebigen Element $a \in G$ ist ein Element $\bar{a}$ gesucht, so dass $a \odot \bar{a} = e$ gilt. ...

Probeklausur – Aufgabe 5 (Forts.)

Aufgabe 9.5.3

Es sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \to G$ durch

$$a \odot b =_{df} a \oplus x \oplus b$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist.
2. Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle für $\odot$ konkret für das Beispiel $\langle G, \oplus \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$.

1. Nachweisen, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist: Assoziativität, neutrales Element, inverses Element
   - Schema:
     - **Assoziativität:** Seien $a, b, c \in G$ beliebig. Zu zeigen ist nun, dass $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ gilt. ...
     - **Neutrales Element:** Es ist ein Element $e \in G$ gesucht, so dass für jedes $a \in G$ $a \odot e = a$ gilt $(a \odot e = a \oplus x \oplus e)$. ...
     - **Inverse Elemente:** Zu einem beliebigen Element $a \in G$ ist ein Element $\bar{a}$ gesucht, so dass $a \odot \bar{a} = e$ gilt. ...
2. Einfach ausrechnen: $1 \odot 2 = 1 +_3 2 +_3 2 = 2$ etc. ...

Probeklausur – Aufgabe 6

Aufgabe 9.6 – Wissensfragen

1. Die Menge der durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen ist echt mächtiger als die Menge der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen.
2. Die Funktion $qs : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihre Quersumme zuordnet, ist ein Ordnungshomomorphismus bzgl. der $\leq$-Ordnung auf den natürlichen Zahlen.
3. Wenn die Relationen $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ transitiv sind, dann ist auch die Relation $R \cup S$ transitiv.
4. Die Menge der positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \backslash \{0\}$ mit der Teilbarkeitsrelation bildet einen vollständigen Verband.
5. Es gibt keinen Körperhomomorhismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$.
6. $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ hat keine Untergruppe mit 5 Elementen.