Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

12.12.2013

Themen heute

- Rückfragen zu den letzten Tutorien (28.11.2013 und 5.12.2013)
- Fortsetzung Injektivitäts- und Surjektivitätsbeweise
- ~~Verbände (?)~~

Rückfragen / Vorschläge

Rückfragen

„Wann muss zwischen zwei Beweisschritten ein Äquivalenz-, wann ein Implikationspfeil gesetzt werden?“

Rückfragen / Vorschläge

Rückfragen

„Wann muss zwischen zwei Beweisschritten ein Äquivalenz-, wann ein Implikationspfeil gesetzt werden?"

Themenvorschläge

- Induktionsbeweise mit den verschiedenen Induktionsarten (✓)
- Beweis von Injektivität und Surjektivität von Funktionen (wird heute fortgesetzt)
- Allgemeine Herangehensweise an Aufgaben
  - Kein Patentrezept!
  - Aber: Einüben von Beweisschemata für verschiedene Probleme (hier)
- Mehr? malte.isberner@tu-dortmund.de

Äquivalenz- vs. Implikationspfeil

Äquivalenzpfeil „$\Leftrightarrow$"

Der Äquivalenzpfeil wird zwischen zwei Beweisschritte gesetzt, wenn die entsprechende Umformung ohne Informationsverlust umkehrbar ist.

- Beispiel: Anwenden des Prinzips „Ersetzen von (semantisch bzw. syntaktisch) Gleichem durch (semantisch bzw. syntaktisch) Gleiches"
- Beispiel: Verknüpfung eines Elementes einer Gruppe auf beiden Seiten einer Gleichung (umkehrbar durch inverse Elemente)
- Beispiel: Anwenden einer injektiven Funktion auf beiden Seiten einer Gleichung (z.B. $y \mapsto x^3$)

Äquivalenz- vs. Implikationspfeil (2)

Implikationspfeil „$\Rightarrow$“

Der Implikationspfeil wird zwischen zwei Beweisschritte gesetzt, wenn die entsprechende Umformung im Allgemeinen nicht bzw. nicht ohne Informationsverlust umkehrbar ist.

- Beispiel: Verknüpfung eines Elementes eines Monoids bzw. einer Halbgruppe auf beiden Seiten einer Gleichung (i.A. kein inverses Element)
- Beispiel: Anwenden einer nicht-injektiven Funktion auf beiden Seiten einer Gleichung (z.B. $y \mapsto x^2$)

Injektivitätsbeweise

Zentral: Was bedeutet „Injektivität“ einer Funktion $f : A \to B$?

$$\forall x, y \in A. x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Nicht-Injektivität:

$$\exists x, y \in A. x \neq y \wedge f(x) = f(y)$$

Herangehensweise

- Direkt: „Seien $x, y \in A$ beliebig aber fest. Wir nehmen nun an, dass $x \neq y$ gelte. Dann folgt …“
- Durch Widerspruch: „Seien $x, y \in A$ beliebig aber fest. Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass f nicht injektiv sei. Damit gibt es $x, y \in A$ mit $x \neq y$, so dass $f(x) = f(y)$ gilt …“
- Durch Kontraposition: „Wir nehmen an, dass für beliebige $x, y \in A$ $f(x) = f(y)$ gelte. Wir zeigen nun, dass daraus $x = y$ folgt.“

Surjektivitätsbeweise

Was bedeutet „Surjektivität“ einer Funktion $f : A \to B$?

$$\forall b \in B . \exists a \in A . f(a) = b$$

Nicht-Surjektivität:

$$\exists b \in B . \forall a \in A . f(a) \neq b$$

Herangehensweise

- Direkt: „Sei $b \in B$ beliebig aber fest. Zu zeigen ist nun, dass ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert. Wir wählen $a =_{df} \ldots$“
- Durch Widerspruch: „Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass f nicht surjektiv sei. Damit gibt es ein $b \in B$, so dass für alle $a \in A$ $f(a) \neq b$ gilt ...“

Bijektivitätsbeweise

Was bedeutet „Bijektivität“ einer Funktion $f\colon A \to B$?

- f ist injektiv und f ist surjektiv

Herangehensweise: Nachweisen, dass f injektiv und surjektiv ist (s. vorangehende Folien) ...

Injektivität, Surjektivität – Beispiele

„Mit Zahlen“

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x + 1$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 + 1$
- $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^4 + 2x^2$
- $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = x^3 + x^2$

Abstrakter

- Aufgabe 8.3.2: [Genau dann,] wenn der Kern eines Gruppenhomomorphismus' $h \colon \langle G, \oplus \rangle \to \langle G', \oplus' \rangle$ nur e enthält, ist h injektiv.
- Seien $f : A \to B$ und $g \colon B \to C$ injektive Funktionen. Dann ist auch $f \circ g$ injektiv.