Mathematik für Informatiker 1 – Tutorium

Malte Isberner

28.11.2013

Über mich ...

Malte Isberner

- Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Programmiersysteme
- Lehrhistorie: Übungsbetreuung MafI 1 (WS2012/13 und WS2013/14)
- Büro: Otto-Hahn-Str. 14, Raum 135
- Kontakt: malte.isberner@tu-dortmund.de

Tutorium?

- Ergänzende Veranstaltung zur Vorlesung
- Wiederholen und Vertiefen von Vorlesungsstoff

Tutorium?

- Ergänzende Veranstaltung zur Vorlesung
- Wiederholen und Vertiefen von Vorlesungsstoff
- Kein Ersatz für Zusatzveranstaltung von Prof. Steffen!
  - Nicht (primär) offene Fragestunde zu aktuellen Vorlesungsthemen
  - Stattdessen: feste Themen (Vorschläge/Wünsche sind willkommen!)
  - Aber auch: geringere Hürde (?) für Fragen

Tutorium?

- Ergänzende Veranstaltung zur Vorlesung
- Wiederholen und Vertiefen von Vorlesungsstoff
- Kein Ersatz für Zusatzveranstaltung von Prof. Steffen!
  - Nicht (primär) offene Fragestunde zu aktuellen Vorlesungsthemen
  - Stattdessen: feste Themen (Vorschläge/Wünsche sind willkommen!)
  - Aber auch: geringere Hürde (?) für Fragen
- Keine zusätzliche Vorlesung
  - Im Fokus: Pragmatik
  - Mehr „Vorrechnen"
  - Heute allerdings: Prinzipielle Ausführungen zum korrekten Umgang mit mathematischen Werkzeugen
  - Ab nächster Woche mehr Praxis

Tutorium!

Ort und Zeit

Ort: Otto-Hahn-Str. 14, Hörsaal E23 (hier!)
Zeit: Donnerstags, (ca.) 18:00-19:30 Uhr (jetzt!)

Themenüberblick

Themen für heute (?):

- Umgehen mit mathematischen Symbolen
- Wie schreibe ich einen Beweis auf?
- Die verschiedenen Induktionsarten

Mathematische Symbole

Fülle von (Relations-)Symbolen:

- $=$, $=_{df}$, $\equiv$, $\Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow_{df}$
- $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$
- $\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$
- $\leq$, $<$, $\preceq$, $\prec$
- ...

Mathematische Symbole

Fülle von (Relations-)Symbolen:

- $=$, $=_{df}$, $\equiv$, $\Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow_{df}$
- $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$
- $\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$
- $\leq$, $<$, $\preceq$, $\prec$
- ...

Oberste Regel: „Typkorrektheit“

Auf beiden Seiten des Relationssymbols dürfen nur bestimmte „Typen“ von Objekten (bspw. Mengen, Aussagen, ...) stehen!

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5` ×

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5` ×
- `4 + 2`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5` ×
- `4 + 2` ✓

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5` ×
- `4 + 2` ✓
- `5 + false`

Typ-(In-)Korrektheit

Beispiel: Java

- `true && false` ✓
- `true || 5` ×
- `"foo" && true` ×
- `"foo" || 5` ×
- `4 + 2` ✓
- `5 + false` ×

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)“

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd $(a, b \in \mathbb{Z})$“

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)"

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd"

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)"

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd"

„$A \setminus (B \cup C) \equiv (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$"

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)“

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd“

„$A \setminus (B \cup C) \equiv (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$“

Nicht korrekt: $A \setminus (B \cup C)$ und $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ sind Mengen

$\equiv$ definiert als semantische Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)“

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd“

„$A \setminus (B \cup C) \equiv (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$“

Nicht korrekt: $A \setminus (B \cup C)$ und $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ sind Mengen

$\equiv$ definiert als semantische Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

„Die Anzahl der Unterbäume von T ist $\leq 2^{h(T)+1} - 1$“

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd $(a, b \in \mathbb{Z})$“

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen

$\wedge$ erfordert Aussagen

Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd“

„$A \setminus (B \cup C) \equiv (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$“

Nicht korrekt: $A \setminus (B \cup C)$ und $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ sind Mengen

$\equiv$ definiert als semantische Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

„Die Anzahl der Unterbäume von T ist $\leq 2^{h(T)+1} - 1$“

Mindestens unschön: $\leq$ ist ein Relationssymbol und erfordert Zahlen auf beiden Seiten (hier: Prosatext)

Typ-Inkorrektheit – Beispiele

„$a \wedge b$ sind teilerfremd ($a, b \in \mathbb{Z}$)"

Nicht korrekt: a und b sind Zahlen
$\wedge$ erfordert Aussagen
Möglich: „a und b sind teilerfremd $\wedge$ c und d sind teilerfremd"

„$A \setminus (B \cup C) \equiv (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$"

Nicht korrekt: $A \setminus (B \cup C)$ und $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ sind Mengen
$\equiv$ definiert als semantische Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

„Die Anzahl der Unterbäume von T ist $\leq 2^{h(T)+1} - 1$"

Mindestens unschön: $\leq$ ist ein Relationssymbol und erfordert Zahlen auf beiden Seiten (hier: Prosatext)
Besser: „Für die Anzahl der Unterbäume von T, $\#_U(T)$, gilt $\#_U(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$."

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert
- Induktives Definieren: first-class citizen ist ein Objekt unter Berücksichtigung seiner Struktur

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert
- Induktives Definieren: first-class citizen ist ein Objekt unter Berücksichtigung seiner Struktur
  - Beispiel: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert
- Induktives Definieren: first-class citizen ist ein Objekt unter Berücksichtigung seiner Struktur
  - Beispiel: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$
  - Aber: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge C$ für $C =_{df} (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert
- Induktives Definieren: first-class citizen ist ein Objekt unter Berücksichtigung seiner Struktur
  - Beispiel: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$
  - Aber: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge C$ für $C =_{df} (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
- BNF-Definition (ähnlich): first-class citizens sind Worte über einem Alphabet Σ

Gleichheit

Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen „=“ drückt aus, dass die Objekte auf beiden Seiten identisch sind.

Aber: Abhängig von Perspektive! Was sind first-class citizens?

- Arithmetik (klassisch): first-class citizen ist die Semantik von Termen
  - Beispiel: $3 + 5 = 8$
  - Wertgleiche Terme werden identifiziert
- Induktives Definieren: first-class citizen ist ein Objekt unter Berücksichtigung seiner Struktur
  - Beispiel: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$
  - Aber: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge C$ für $C =_{df} (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
- BNF-Definition (ähnlich): first-class citizens sind Worte über einem Alphabet Σ
  - $\mathbf{--3 \neq 3}$

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$" drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \vee c = 0$

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \vee c = 0$
- Verwendet als Junktor in der Aussagenlogik („Anschauungsobjekt“)

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \vee c = 0$
- Verwendet als Junktor in der Aussagenlogik („Anschauungsobjekt“)
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \lor c = 0$
- Verwendet als Junktor in der Aussagenlogik („Anschauungsobjekt“)
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \lor (\neg \mathcal{A} \land \neg \mathcal{B})$

Grenze zwischen Werkzeug und Anschauungsobjekt oft fließend!

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$“ drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug“)
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \vee c = 0$
- Verwendet als Junktor in der Aussagenlogik („Anschauungsobjekt“)
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$

Grenze zwischen Werkzeug und Anschauungsobjekt oft fließend!

Edsger W. Dijkstra

„In der Informatik geht es genauso wenig um Computer wie in der Astronomie um Teleskope.“

Logische Äquivalenz

Logische Äquivalenz

Die logische Äquivalenz „$\Leftrightarrow$" drückt aus, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann gilt, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.

Achtung: Überladung!

- Verwendet in Beweisen, um (bidirektionale) Folgerungen zu kennzeichnen („Werkzeug")
  - $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b \vee c = 0$
- Verwendet als Junktor in der Aussagenlogik („Anschauungsobjekt")
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$

Grenze zwischen Werkzeug und Anschauungsobjekt oft fließend!

Edsger W. Dijkstra

„In der Informatik geht es genauso wenig um Computer wie in der Astronomie um Teleskope."

Nicht ganz: Teleskop ist in der Astronomie kein Anschauungsobjekt! ($\rightarrow$ Technische Informatik)

Semantische Äquivalenz

Semantische Äquivalenz

Die semantische Äquivalenz „$\equiv$" drückt aus, dass die aussagenlogischen Formeln auf beiden Seiten unter jeder Belegung den gleichen Wahrheitswert annehmen, also semantisch äquivalent sind.

Semantische Äquivalenz

Semantische Äquivalenz

Die semantische Äquivalenz „$\equiv$“ drückt aus, dass die aussagenlogischen Formeln auf beiden Seiten unter jeder Belegung den gleichen Wahrheitswert annehmen, also semantisch äquivalent sind.

- Kennzeichnet Metaebene („Aussage über Aussagen“), im Gegensatz zu „$\Leftrightarrow$“, welches in aussagenlogischen Formeln auftritt

Semantische Äquivalenz

Semantische Äquivalenz

Die semantische Äquivalenz „$\equiv$“ drückt aus, dass die aussagenlogischen Formeln auf beiden Seiten unter jeder Belegung den gleichen Wahrheitswert annehmen, also semantisch äquivalent sind.

- Kennzeichnet Metaebene („Aussage über Aussagen“), im Gegensatz zu „$\Leftrightarrow$“, welches in aussagenlogischen Formeln auftritt
- Eng verwandt zu $\Leftrightarrow$: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ eine Tautologie ist

Semantische Äquivalenz

Semantische Äquivalenz

Die semantische Äquivalenz „$\equiv$" drückt aus, dass die aussagenlogischen Formeln auf beiden Seiten unter jeder Belegung den gleichen Wahrheitswert annehmen, also semantisch äquivalent sind.

- Kennzeichnet Metaebene („Aussage über Aussagen"), im Gegensatz zu „$\Leftrightarrow$", welches in aussagenlogischen Formeln auftritt
- Eng verwandt zu $\Leftrightarrow$: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ eine Tautologie ist
- Achtung: Zwar folgt aus $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ auch $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, der Umkehrschluss gilt aber i.A. nicht! (keine Strukturgleichheit)

Semantische Äquivalenz

Semantische Äquivalenz

Die semantische Äquivalenz „$\equiv$“ drückt aus, dass die aussagenlogischen Formeln auf beiden Seiten unter jeder Belegung den gleichen Wahrheitswert annehmen, also semantisch äquivalent sind.

- Kennzeichnet Metaebene („Aussage über Aussagen“), im Gegensatz zu „$\Leftrightarrow$“, welches in aussagenlogischen Formeln auftritt
- Eng verwandt zu $\Leftrightarrow$: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ eine Tautologie ist
- Achtung: Zwar folgt aus $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ auch $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, der Umkehrschluss gilt aber i.A. nicht! (keine Strukturgleichheit)

Beziehung zwischen $\equiv$ und $=$

Es gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $[\![\mathcal{A}]\!]_{BT} = [\![\mathcal{B}]\!]_{BT}$ ist.
(Erinnerung: $[\![\mathcal{A}]\!]_{BT}$ ist Funktion)

Definitionen

Definitionszeichen „$=_{df}$"

Das Definitionszeichen „$=_{df}$" führt einen Bezeichner (linke Seite) ein, der als identisch mit dem Objekt auf der rechten Seite (Term, Menge, Prädikat, ...) verwendet werden kann.

Definitionen

Definitionszeichen „$=_{df}$“

Das Definitionszeichen „$=_{df}$“ führt einen Bezeichner (linke Seite) ein, der als identisch mit dem Objekt auf der rechten Seite (Term, Menge, Prädikat, ...) verwendet werden kann.

Zentral: „Prinzip des Ersetzens von Gleichem durch Gleiches“

Definitionen

Definitionszeichen „$=_{df}$“

Das Definitionszeichen „$=_{df}$“ führt einen Bezeichner (linke Seite) ein, der als identisch mit dem Objekt auf der rechten Seite (Term, Menge, Prädikat, ...) verwendet werden kann.

Zentral: „Prinzip des Ersetzens von Gleichem durch Gleiches“

- Nach Definition $x =_{df} t$ kann jedes Vorkommen von x durch t (und umgekehrt) ersetzt werden

Definitionen

Definitionszeichen „$=_{df}$"

Das Definitionszeichen „$=_{df}$" führt einen Bezeichner (linke Seite) ein, der als identisch mit dem Objekt auf der rechten Seite (Term, Menge, Prädikat, ...) verwendet werden kann.

Zentral: „Prinzip des Ersetzens von Gleichem durch Gleiches"

- Nach Definition $x =_{df} t$ kann jedes Vorkommen von x durch t (und umgekehrt) ersetzt werden
- Daher auch: $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge C$ für $C =_{df} (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$"

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$" drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$"

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$" drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Beispiel: $xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \leq 5, \quad \forall x, y \in \{0, \ldots, 5\}$

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“ drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Beispiel: $xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \leq 5, \quad \forall x, y \in \{0, \dots, 5\}$

- „Indirekte“ Definition von R (Relation $\rightarrow$ Menge)

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“ drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Beispiel: $xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \leq 5, \quad \forall x, y \in \{0, \ldots, 5\}$

- „Indirekte“ Definition von R (Relation $\rightarrow$ Menge)
- $xRy =_{df} \ldots$ nicht erlaubt, da Infixnotation xRy allgemein bereits definiert

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$“ drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Beispiel: $xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \leq 5, \quad \forall x, y \in \{0, \ldots, 5\}$

- „Indirekte“ Definition von R (Relation $\rightarrow$ Menge)
- $xRy =_{df} \ldots$ nicht erlaubt, da Infixnotation xRy allgemein bereits definiert
  - Möglich: direkte Definition von R als Menge
    $R =_{df} \{(x, y) \in \{0, \ldots, 5\}^2 \mid x + y \leq 5\}$

Definitionen (2)

Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$"

Das Definitionszeichen „$\Leftrightarrow_{df}$" drückt aus, dass eine Aussage als logisch äquivalent zu einer anderen Aussage definiert wird.

Beispiel: $xRy \Leftrightarrow_{df} x + y \leq 5, \quad \forall x, y \in \{0, \dots, 5\}$

- „Indirekte" Definition von R (Relation $\rightarrow$ Menge)
- $xRy =_{df} \dots$ nicht erlaubt, da Infixnotation xRy allgemein bereits definiert
  - Möglich: direkte Definition von R als Menge
    $R =_{df} \{(x, y) \in \{0, \dots, 5\}^2 \mid x + y \leq 5\}$
  - Oder: direkte Definition von R als zweistelliges Prädikat
    $R(x, y) =_{df} x + y \leq 5 \ \ \forall x, y \in \{0, \dots, 5\}$

Zur Verwendung von „$\Rightarrow$“ und „$\Leftrightarrow$“

Achtung!

Aus den Aussagen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sowie $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ lässt sich nichts über die Gültigkeit von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ alleine folgern!

- Äquivalenz auch erfüllt, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide falsch sind.
- Implikation immer erfüllt, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 1

Beispiel: Korrekte Verwendung („Vorwärts-Beweis“ mit Implikation)

Annahme: $x - 10 = 20$
Behauptung: $x^2 = 900$
Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & x - 10 & = & 20 & \mid +10 \\ \Leftrightarrow & x & = & 30 & \mid ()^2 \\ \Rightarrow & x^2 & = & 900 & \end{array}$$

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 1

Beispiel: Korrekte Verwendung („Vorwärts-Beweis“ mit Implikation)

Annahme: $x - 10 = 20$
Behauptung: $x^2 = 900$
Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & x - 10 & = & 20 & \mid +10 \\ \Leftrightarrow & x & = & 30 & \mid ()^2 \\ \Rightarrow & x^2 & = & 900 & \end{array}$$

Behauptung aus (als korrekt vorausgesetzter) Annahme abgeleitet.

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 2

Beispiel: Korrekte Verwendung („Rückwärts-Beweis“ mit Äquivalenz)

Behauptung: $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$

Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & x^2 + 2xy & = & (x+y)^2 - y^2 & \mid +y^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2xy + y^2 & = & (x+y)^2 & \mid \text{bin. Formel} \\ \Leftrightarrow & (x+y)^2 & = & (x+y)^2 & \end{array}$$

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 2

Beispiel: Korrekte Verwendung („Rückwärts-Beweis“ mit Äquivalenz)

Behauptung: $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$
Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & x^2 + 2xy & = & (x+y)^2 - y^2 & \mid +y^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2xy + y^2 & = & (x+y)^2 & \mid \text{bin. Formel} \\ \Leftrightarrow & (x+y)^2 & = & (x+y)^2 & \end{array}$$

Letzte Zeile ist Tautologie. Allgemeingültigkeit überträgt sich rückwärts auf die Behauptung (1. Zeile) durch Symmetrie und Transitivität von $\Leftrightarrow$.

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 3

Beispiel: Falsche Verwendung (Rückwärts-„Beweis“ mit Implikation)

Behauptung: $-x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

„Beweis:“

$$\begin{array}{rrcll} & -x & = & x & \\ \Leftrightarrow & (-1) \cdot x & = & x & \mid ()^2 \\ \Rightarrow & (-1)^2 \cdot x^2 & = & x^2 & \\ \Leftrightarrow & 1 \cdot x^2 & = & x^2 & \end{array}$$

Implikation und Äquivalenz – Beispiel 3

Beispiel: Falsche Verwendung (Rückwärts-„Beweis“ mit Implikation)

Behauptung: $-x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

„Beweis:“

$$\begin{array}{rrcll} & -x & = & x & \\ \Leftrightarrow & (-1) \cdot x & = & x & \mid ()^2 \\ \Rightarrow & (-1)^2 \cdot x^2 & = & x^2 & \\ \Leftrightarrow & 1 \cdot x^2 & = & x^2 & \end{array}$$

Letzte Zeile zwar Tautologie, aber „$\Rightarrow$“ nicht symmetrisch! Folgerung auch korrekt wenn Prämisse der Implikation falsch.

Implikation und Äquivalenz – Fallstricke in Beweisen

Achtung!

Die zu beweisende Behauptung darf in einen Beweis niemals direkt als Voraussetzung (Zirkelschluss-Problematik) bzw. Prämisse einer Implikation („ex falso quodlibet“) eingehen!

Implikation und Äquivalenz – Fallstricke in Beweisen

Achtung!

Die zu beweisende Behauptung darf in einen Beweis niemals direkt als Voraussetzung (Zirkelschluss-Problematik) bzw. Prämisse einer Implikation („ex falso quodlibet“) eingehen!

Guter Stil: Behauptungen explizit kennzeichnen: „zu zeigen:“, „zu beweisen:“, „Behauptung:“, „$\stackrel{!}{=}$“

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien ...“, „Es gelte ...“, ...)

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien . . .“, „Es gelte . . .“, . . .)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien …“, „Es gelte …“, …)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“
2. Zu beweisende Aussage („Zu zeigen:“, „Behauptung:“, …)

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien …“, „Es gelte …“, …)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“
2. Zu beweisende Aussage („Zu zeigen:“, „Behauptung:“, …)
   - „Behauptung: $A \lneqq \mathfrak{P}(A)$.“
   - „Zu zeigen: $\exists z \in \mathbb{R}. x < z < y$“

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien . . .“, „Es gelte . . .“, . . .)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“
2. Zu beweisende Aussage („Zu zeigen:“, „Behauptung:“, . . .)
   - „Behauptung: $A \lneqq \mathfrak{P}(A)$.“
   - „Zu zeigen: $\exists z \in \mathbb{R}. x < z < y$“
3. Beweis (problemspezifisch)

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien …“, „Es gelte …“, …)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“
2. Zu beweisende Aussage („Zu zeigen:“, „Behauptung:“, …)
   - „Behauptung: $A \lneqq \mathfrak{P}(A)$.“
   - „Zu zeigen: $\exists z \in \mathbb{R}. x < z < y$“
3. Beweis (problemspezifisch)
   - „Die Gültigkeit von $A \leq \mathfrak{P}(A)$ folgt unmittelbar aus der Injektion $f : A \to \mathfrak{P}(A)$, $f(a) =_{df} \{a\}$. Wir zeigen nun, dass $A \not\cong \mathfrak{P}(A)$ ist. Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass $A \cong \mathfrak{P}(A)$ sei. …“ (Direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, …)
   - „Wähle $z =_{df} \frac{x+y}{2}$. Aus $y > x$ folgt $x + y > 2x$, also ist $z > x$. …“ (Auflösung von Quantoren, direkter Beweis, …)

Korrektes Aufschreiben von Beweisen

Prinzipielles Schema eines mathematischen Beweises

1. Voraussetzungen bzw. Annahmen der behaupteten Aussage („Seien …“, „Es gelte …“, …)
   - „Sei A eine Menge.“
   - „Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $x < y$.“
2. Zu beweisende Aussage („Zu zeigen:“, „Behauptung:“, …)
   - „Behauptung: $A \lneqq \mathfrak{P}(A)$.“
   - „Zu zeigen: $\exists z \in \mathbb{R}.\, x < z < y$“
3. Beweis (problemspezifisch)
   - „Die Gültigkeit von $A \leq \mathfrak{P}(A)$ folgt unmittelbar aus der Injektion $f : A \to \mathfrak{P}(A)$, $f(a) =_{df} \{a\}$. Wir zeigen nun, dass $A \ncong \mathfrak{P}(A)$ ist. Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass $A \cong \mathfrak{P}(A)$ sei. …“ (Direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, …)
   - „Wähle $z =_{df} \frac{x+y}{2}$. Aus $y > x$ folgt $x + y > 2x$, also ist $z > x$. …“ (Auflösung von Quantoren, direkter Beweis, …)
4. „q.e.d.“

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?“

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?“

- Schematisches Vorgehen nach Beweisprinzipien

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?"

- Schematisches Vorgehen nach Beweisprinzipien
  - $\exists$, $\forall$: Auflösen von Quantoren
  - Aussage über induktiv definierte Struktur: Strukturelle Induktion
  - ...

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?“

- Schematisches Vorgehen nach Beweisprinzipien
  - $\exists$, $\forall$: Auflösen von Quantoren
  - Aussage über induktiv definierte Struktur: Strukturelle Induktion
  - ...
- Intuition

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?“

- Schematisches Vorgehen nach Beweisprinzipien
  - $\exists$, $\forall$: Auflösen von Quantoren
  - Aussage über induktiv definierte Struktur: Strukturelle Induktion
  - ...
- Intuition
  - „Üben, üben, üben.“ –Lenin
  - Aber: Strukturiertes Aufschreiben von Annahmen und Behauptungen oft sehr hilfreich

Zur Auswahl der Beweismethode

Häufige Frage: „Wie komme ich auf den Beweis?“

- Schematisches Vorgehen nach Beweisprinzipien
  - $\exists$, $\forall$: Auflösen von Quantoren
  - Aussage über induktiv definierte Struktur: Strukturelle Induktion
  - ...
- Intuition
  - „Üben, üben, üben.“ –Lenin
  - Aber: Strukturiertes Aufschreiben von Annahmen und Behauptungen oft sehr hilfreich

Jetzt: Einüben des Vorgehens am Beispiel von verschiedenen Induktionsbeweisen (by popular demand)

Die verschiedenen Induktionsarten

Induktionsarten

- Noethersche Induktion
- Strukturelle Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Vollständige Induktion

Die verschiedenen Induktionsarten

Induktionsarten

- Noethersche Induktion
- Strukturelle Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Vollständige Induktion

„Mächtigkeit“ bzw. „Spezifizität“:

Noethersche Induktion

Strukturelle Induktion

Verallgemeinerte Induktion

Vollständige Induktion

Die verschiedenen Induktionsarten

Induktionsarten

- Noethersche Induktion
- Strukturelle Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Vollständige Induktion

„Mächtigkeit" bzw. „Spezifizität":

Noethersche Induktion

Strukturelle Induktion

Verallgemeinerte Induktion

Vollständige Induktion

Auswahlprinzip: KISS

Die verschiedenen Induktionsarten

Induktionsarten

- Noethersche Induktion
- Strukturelle Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Vollständige Induktion

„Mächtigkeit“ bzw. „Spezifizität“:

Noethersche Induktion

Strukturelle Induktion

Verallgemeinerte Induktion

Vollständige Induktion

Auswahlprinzip: KISS – Keep it simple, stupid!

Auswahl der Induktionsart nach dem KISS-Prinzip

- Vollständige und verallgemeinerte Induktion funktionieren nur auf $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$)!
- Strukturelle Induktion funktioniert nur auf induktiv definierten Strukturen
- Noethersche Induktion ist sehr mächtiges, generisches Werkzeug, Anwendung aber oft kompliziert.

Auswahl der Induktionsart nach dem KISS-Prinzip

- Vollständige und verallgemeinerte Induktion funktionieren nur auf $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$)!
- Strukturelle Induktion funktioniert nur auf induktiv definierten Strukturen
- Noethersche Induktion ist sehr mächtiges, generisches Werkzeug, Anwendung aber oft kompliziert.

Also: Ist eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. für alle $n \geq n_0$) zu zeigen, so ist vollständige (einfacher!) oder verallgemeinerte (komplizierter) Induktion das Mittel der Wahl (aber auch hier: Ausnahmen).

Auswahl der Induktionsart nach dem KISS-Prinzip

- Vollständige und verallgemeinerte Induktion funktionieren nur auf $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$)!
- Strukturelle Induktion funktioniert nur auf induktiv definierten Strukturen
- Noethersche Induktion ist sehr mächtiges, generisches Werkzeug, Anwendung aber oft kompliziert.

Also: Ist eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. für alle $n \geq n_0$) zu zeigen, so ist vollständige (einfacher!) oder verallgemeinerte (komplizierter) Induktion das Mittel der Wahl (aber auch hier: Ausnahmen).

- Vollständige Induktion, falls in der induktiven (rekursiven) Definition nur auf den unmittelbaren Vorgänger Bezug genommen wird.
  - $\sum\limits_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right) + (n+1)$

Auswahl der Induktionsart nach dem KISS-Prinzip

- Vollständige und verallgemeinerte Induktion funktionieren nur auf $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$)!
- Strukturelle Induktion funktioniert nur auf induktiv definierten Strukturen
- Noethersche Induktion ist sehr mächtiges, generisches Werkzeug, Anwendung aber oft kompliziert.

Also: Ist eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. für alle $n \geq n_0$) zu zeigen, so ist vollständige (einfacher!) oder verallgemeinerte (komplizierter) Induktion das Mittel der Wahl (aber auch hier: Ausnahmen).

- Vollständige Induktion, falls in der induktiven (rekursiven) Definition nur auf den unmittelbaren Vorgänger Bezug genommen wird.
  - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1)$
- Verallgemeinerte Induktion, falls auch auf die Gültigkeit der Aussage für Vorvorgänger etc. zurückgegriffen wird.
  - Beispiel: $a_n =_{df} \frac{1}{2} a_{n-3} + \frac{3}{2} a_{n-2} + \frac{1}{2} a_{n-1}$

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$“
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für $n = n_0$
  - Induktionsschritt: Beweis der Aussage für $n + 1$ unter der Voraussetzung dass die Aussage für n gilt.

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$“
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für $n = n_0$
  - Induktionsschritt: Beweis der Aussage für $n + 1$ unter der Voraussetzung dass die Aussage für n gilt.

Beispiele:

- $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion – Korrektes Aufschreiben

Bevorzugte Verschriftlichung eines Beweises mit vollständiger Induktion.

Achtung! Abweichung von Tutorium!

- Dort gezeigte Variante nicht falsch (keine Punktabzüge in Klausur)
- Aber: Hier exakt wie in Musterlösungen (vgl. Buch S. 171)

Beweis der Summenformel

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: per vollständiger Induktion.

- Induktionsbeginn: Es sei $n = 0$. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{0} i \overset{(\text{Def. } \sum)}{=} 0 = \frac{0(0+1)}{2} \quad \checkmark$$

Vollständige Induktion – Korrektes Aufschreiben (Forts.)

Beweis der Summenformel (Forts.)

- Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es sei die Behauptung für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}$ bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Wir zeigen nun die Gültigkeit der Behauptung für $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &\overset{(\text{Def. } \sum)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1)\\ &\overset{(\text{IV})}{=} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Nach dem Induktionsprinzip folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Verallgemeinerte Induktion

Verallgemeinerte Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$"
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für alle $n_0 \leq n \leq n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, für welche das zugrundeliegende induktiv definierte Objekt (z.B. Funktion) nicht rekursiv definiert ist (z.B. $fib(0)$, $fib(1)$).
  - Induktionsschritt: Beweis der Aussage für n unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle $n_0 \leq m < n$ gilt.

Verallgemeinerte Induktion

Verallgemeinerte Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$"
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für alle $n_0 \leq n \leq n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, für welche das zugrundeliegende induktiv definierte Objekt (z.B. Funktion) nicht rekursiv definiert ist (z.B. $fib(0)$, $fib(1)$).
  - Induktionsschritt: Beweis der Aussage für n unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle $n_0 \leq m < n$ gilt.

Beispiele:

- Jede natürliche Zahl n mit $n \geq 8$ lässt sich als Summe von 3en und 5en darstellen.
- $fib(n) \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion

Strukturelle Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in X$, wobei X eine induktiv definierte Menge ist.“
  - Erinnerung: Induktiv definierte Mengen definiert durch Atome und Konstruktoren (Konstruktionsregeln)
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für jedes Atom.
  - Induktionsschritt: (jeweils) Beweis der Aussage für jedes nach einer bestimmten Konstruktionsregel konstruierten Objekt unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle (unmittelbaren) Teilobjekte gilt (i.d.R. alls Fallunterscheidung)

Strukturelle Induktion

Strukturelle Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in X$, wobei X eine induktiv definierte Menge ist.“
  - Erinnerung: Induktiv definierte Mengen definiert durch Atome und Konstruktoren (Konstruktionsregeln)
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für jedes Atom.
  - Induktionsschritt: (jeweils) Beweis der Aussage für jedes nach einer bestimmten Konstruktionsregel konstruierten Objekt unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle (unmittelbaren) Teilobjekte gilt (i.d.R. alls Fallunterscheidung)

Beispiel:

- Jeder variablenfreie Boolesche Term ist semantisch äquivalent zu T oder F

Noethersche Induktion

Noethersche Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in A$, wobei A eine durch eine (Quasi-)Ordnung $\preceq$ Noethersch (quasi-)geordnete Menge ist.“
  - Erinnerung: Eine Ordnung $\preceq$ auf einer Menge A heißt Noethersch genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq A$ ein bzgl. $\preceq$ minimales Element enthält.
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für jedes global minimale $x \in A$ (d.h. für jedes $x \in A$, für dass kein $y \in A$ mit $y \prec x$ existiert).
  - Induktionsschritt: (jeweils) Beweis der Aussage für ein nicht-minimales $x \in A$ unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle $y \in A$ mit $y \prec x$ gilt.

Noethersche Induktion

Noethersche Induktion – Schema-Sicht

- Form der Aufgabenstellung: „Behauptung: Es gelte eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in A$, wobei A eine durch eine (Quasi-)Ordnung $\preceq$ Noethersch (quasi-)geordnete Menge ist."
  - Erinnerung: Eine Ordnung $\preceq$ auf einer Menge A heißt Noethersch genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq A$ ein bzgl. $\preceq$ minimales Element enthält.
- Beweisschema:
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für jedes global minimale $x \in A$ (d.h. für jedes $x \in A$, für dass kein $y \in A$ mit $y \prec x$ existiert).
  - Induktionsschritt: (jeweils) Beweis der Aussage für ein nicht-minimales $x \in A$ unter der Voraussetzung dass die Aussage für alle $y \in A$ mit $y \prec x$ gilt.

Beispiel:

- Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ lässt sich als Produkt $n = 2^k \cdot m$ mit natürlichen Zahlen k und m darstellen, wobei $k \geq 0$ und m ungerade ist.