Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 26 (24.06.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Dimensionssatz
- Lineare Abbildungen
- Basiswechsel
- Determinanten

Aufgabe zur Dimensionsformel

Seien U, W Teilräume von $\mathbb{R}^{15}$, mit $\dim U = 7$ und $\dim W = 11$.
In welchen Bereichen kann $dim(U \cap W)$ liegen?

Definitionen

1. Sei V ein Vektorraum und U_1, U_2 Teilräume von V. Dann sind
   - $U_1 \cap U_2$ und
   - $U_1 + U_2 =_{df} \{\vec{u_1} + \vec{u_2} | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$

   auch Teilräume von V.
2. Sei U Teilraum eines endlichdimensionalen Verktorraumes V, dann gilt
$$\dim U \leq \dim V$$
3. Seien U_1, U_2 Teilräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes V, dann gilt
$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

Lineare Abbildung (Vektorraumhomomorphismus)

Seien V und W zwei K-Verktorräume und $\varphi \colon V \to W$ eine Abbildung. φ heißt linear oder Vektorraumhomomorphismus, falls

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}+\vec{w}) &= \varphi(\vec{v})+\varphi(\vec{w}) & ,\forall \vec{v},\vec{w} \in V \\ \varphi(s\cdot\vec{v}) &= s\cdot\varphi(\vec{v}) & ,\forall s \in K, \vec{v} \in V \end{aligned}$$

Charakterisierung linearer Abbildungen

Seien V und W zwei K-Verktorräume und $\varphi \colon V \to W$ eine Abbildung. φ heißt linear oder Vektorraumhomomorphismus, falls

$$\varphi(s\cdot\vec{v}+\vec{w}) = s\cdot\varphi(\vec{v})+\varphi(\vec{w})$$

für alle $s \in K$ und $\vec{v},\vec{w} \in V$

Charakterisierung linearer Abbildungen

Seien V und W zwei K-Verktorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung. φ heißt linear oder Vektorraumhomomorphismus, falls

$$\varphi(s \cdot \vec{v} + \vec{w}) = s \cdot \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{w})$$

für alle $s \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$

Aufgabe: Lineare Abbildung

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $f(\vec{v}) = v_1 + \cdots + v_n$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(\vec{v}) = v_1 \cdot v_2$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, mit $f(\vec{v}) = (v_1 + 1, 2v_2, v_1 + v_2)$

Kern und Bild linearer Abbildungen

Seien V, W zwei K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\varphi) &=_{df} \{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\} \\ \mathrm{Bild}(\varphi) &=_{df} \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} \end{aligned}$$

Aufgabe: Kern/Bild

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Welcher der folgenden Vektoren liegt in Kern(φ), welcher in Bild(φ):

$$\vec{u} = (6, -3)^t, \vec{v} = (4, 4)^t, \vec{w} = (6, 5)^t$$

Dimensionssatz für Homomorphismen

Seien V, W Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist V endlich-dimensional, dann gilt:

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(\varphi) + \dim \operatorname{Bild}(\varphi)$$

Aufgabe: Kern/Bild

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestimme $\operatorname{Kern}(\varphi)$ und $\operatorname{Bild}(\varphi)$

Injektivität/Surjektivität linearer Abbildungen

Seien V, W Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt:

1. Kern(φ) ist Teilraum von V und
$$\text{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist injektiv}$$
2. Bild(φ) ist Teilraum von W und
$$\text{Bild}(\varphi) = W \Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv}$$

Aufgabe: Kern/Bild

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ist φ ein Isomorphismus?

Eine besondere lineare Abbildung

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Definiere φ_A durch

$$\begin{aligned} \varphi_A \colon K^n &\rightarrow K^m \\ \vec{x} &\mapsto A \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Jede solche Abbildung φ_A ist linear.

Eindeutigkeit linearer Abbildungen

Seien V, W K-VR, $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ Basis von V und $w_1, \cdots, w_n \in W$ Vektoren, dann gibt es genau eine lineare Abbildung mit:

$$\varphi \colon V \rightarrow W \text{ mit}$$

$$\varphi(v_i) = w_i \text{ für } i = 1, \cdots, n$$

Jede lineare Abbildung ist durch die Bilder der Ausgangsbasis eindeutig bestimmt.

Darstellung linearer Abbildungen

Jede lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$ ist von der Form $\varphi = \varphi_A$ für $A \in K^{m \times n}$.
A heißt darstellende Matrix von φ

Wie komme ich an die darstellende Matrix von φ?

Darstellung linearer Abbildungen

Jede lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$ ist von der Form $\varphi = \varphi_A$ für $A \in K^{m \times n}$.
A heißt darstellende Matrix von φ

Wie komme ich an die darstellende Matrix von φ?

Beispiel

Sei $\varphi\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung und E_n die Standardbasis von K^n,

dann ist $\varphi(\vec{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^M, 1 \leq i \leq n$

und somit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$

Matrix einer linearen Abbildung

Seien V, W endlich dimensionale K-VR, $\dim V = n$ mit Basis $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ und $\dim W = m$ mit Basis $B' = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m)$. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Die durch

$$\varphi(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \vec{w}_i \qquad \text{für } i = 1, .., m \ j = 1, .., n$$

definierte Matrix $(a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt Matrix von φ bezüglich der Basen B und B'.

$${}_{B'}[\varphi]_B = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$$

Basiswechselmatrix

Sei V ein K-VR mit Basen $B = (\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)$ und $B' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$, dann heißt die Matrix

$$Q = (q_{ij}) =_{df} {}_{B'}[id_V]_B$$

Basiswechselmatrix.
Die Basiswechselmatrix $Q =_{B'} [id_V]_B$ ist invertierbar mit $Q^{-1} =_B [id_V]_{B'}$

Berechnung von Basistransformationen

Seien V, W endlich-dimensionale K-VR mit B, B' Basen von V und C, C' Basen von W. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$_{C'}[\varphi]_{B'} = {}_{C'}[id_W]_C \cdot {}_C[\varphi]_B \cdot {}_B[id_V]_{B'}$$

Basiswechsel/Basistransformation

Gegeben sind die Vektorräume $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ mit den zugehörigen Standardbasen $E_3 = \{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ und $E_2 = \{(1,0)^t, (0,1)^t\}$. Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & + & 2y & + & 3z \\ 2x & + & 3y & + & 4z \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die Matrix $_{E_2}[\varphi]_{E_3}$ von φ bezüglich der Standardbasen an.
2. Geben Sie die Matrix $_{B_2}[\varphi]_{B_3}$ von φ an, für die Basen
   - $B_3 = \{(1,2,-1)^t, (2,-1,2)^t, (3,1,-1)^t\}$
   - $B_2 = \{(1,2)^t, (2,3)^t\}$

Basistransformation/Basiswechsel

Gegeben VR $\mathbb{R}^3$ mit $B = \{(1,3,0)^t, (0,2,1)^t, (1,1,0)^t\}$ und $\mathbb{R}^4$ mit Basis E_4. Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \varphi((1,3,0)^t) &= (1,0,1,0)^t \\ \varphi((0,2,1)^t) &= (0,0,1,0)^t \\ \varphi((1,1,0)^t) &= (1,1,0,0)^t \end{aligned}$$

1. Geben Sie die Matrix ${}_{E_4}[\varphi]_B$ von φ an.
2. Bestimmen Sie die Matrix ${}_{E_4}[\varphi]_{E_3}$.

Lösung ${}_{E_4}[\varphi]_{E_3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Streichungsmatrix

Sei A eine $n \times n$ Matrix, dann ist $\check{A}_{ij}$ die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix die entsteht, indem man die i-te Zeile und j-te Spalte auf A streicht. $\check{A}_{ij}$ wird Streichungsmatrix genannt.

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte

Die Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix lässt sich rekursiv definieren:

- Für $n = 1$ ist $\det(A) = a_{11}$
- Für $n > 1$ ist $\det(A)$ entwickelt nach:
  - der i-ten Zeile: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\check{A}_{ij})$ für festes $i \in \{1, ..., n\}$
  - der j-ten Spalte: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\check{A}_{ij})$ für festes $j \in \{1, ..., n\}$

Regeln für Entwicklung

i-ten Zeile: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\check{A}_{ij})$

j-ten Spalte: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\check{A}_{ij})$

Aufgabe: Determinante berechnen

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det(A) = -10$

Obere Diagonalmatrix

Die Determinante einer oberen $(n \times n)$ Dreiecksmatrix (unter der Hauptdiagonalen sind nur „Null"-Einträge) berechnet sich durch:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Auswirkungen von elementaren Zeilenumformungen auf det

Entsteht A' aus A durch...

- $V_{k,l}$, so gilt: $\det(A') = -\det(A)$
- $M_k(c)$, so gilt: $\det(A') = c \cdot \det(A)$
- $A_{k,l}(c)$, so gilt: $\det(A') = \det(A)$

Auswirkungen von elementaren Zeilenumformungen auf det

Entsteht A' aus A durch...

- $V_{k,l}$, so gilt: $\det(A') = -\det(A)$
- $M_k(c)$, so gilt: $\det(A') = c \cdot \det(A)$
- $A_{k,l}(c)$, so gilt: $\det(A') = \det(A)$

Aufgabe: Determinante berechnen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{190}{11} \end{pmatrix} \text{ durch:}$$

$V_{1,2}, A_{1,2}(-3), A_{1,3}(-4), A_{1,4}(-1), A_{1,5}(-2), V_{2,5}, A_{2,3}(6), A_{2,5}(2),$

$\hat{V}_{3,5}, V_{3,4}, A_{3,4}(-31), A_{3,5}(-8), V_{4,5}, M_4(-\frac{1}{22}), A_{4,5}(82)$

Bestimmen Sie $\det(A)$.
Lösung: $\det(A) = -380$