

Maf1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 25 (17.06.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Wiederholung: Fragen zum 2. Teil der Abgabe?
- Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit / Erzeugendensystem / Basis
- Dimensionssatz
- Matrix invertieren

Lineare Abhängigkeit / Basis

Gegeben seien die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^5 :

$$\vec{v}_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$$

$$\vec{v}_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$$

$$\vec{v}_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$$

$$\vec{v}_4 = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\vec{v}_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$$

- 1 Sind die Vektoren v_1, \dots, v_5 linear unabhängig?
- 2 Bestimmen Sie eine Basis für $\langle \{v_1, \dots, v_5\} \rangle$

Aufgaben

Sei die Mengen U definiert durch:

$$U =_{df} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \wedge x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Bestimmen Sie eine Basis für U .

Generische „rechte“ Seiten

Gegeben ist eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ und zwei Vektoren \vec{b}, \vec{c} .

Löse (A, \vec{b}) und (A, \vec{c}) . Muss man die Rechnung 2 mal ausführen?

Generische „rechte“ Seiten

Gegeben ist eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ und zwei Vektoren \vec{b}, \vec{c} .
 Löse (A, \vec{b}) und (A, \vec{c}) . Muss man die Rechnung 2 mal ausführen? Berechne
 $(A, E^n) \in K^{n \times (m+n)}$: E^n „speichert“ die Zeilenumformungen.

$$(A, E^n) \Rightarrow (B, C)$$

mit $B = U \cdot A$ und $C = U \cdot E^n = U$.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow U \cdot A\vec{x} = U \cdot \vec{b} \quad (U \text{ invertierbar})$$

Reguläre Matrizen invertieren

Betrachte (A, E^n) : Aus den obigen Überlegungen

- Falls gilt $(U \cdot A)\vec{x} = \vec{x}$, dann ist $U = A^{-1}$!
- ⇒ Forme (A, E^n) mit dem Gauß-Algorithmus um zu (E^n, U) .

Aufgabe

Gegeben sei die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

- 1 Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.
- 2 Interpretieren Sie A als Matrix über $(\mathbb{Z}_5)^{3 \times 3}$. Lässt sich die Matrix über dem Körper \mathbb{Z}_5 invertieren?

Aufgabe

Gegeben sei die reguläre Matrix $A \in (\mathbb{Z}_5)^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.

Aufgabe zur Dimensionsformel

Seien U, W Teilräume von \mathbb{R}^{15} , mit $\dim U = 7$ und $\dim W = 11$.
In welchen Bereichen kann $\dim(U \cap W)$ liegen?

Definitionen

① Sei V ein Vektorraum und U_1, U_2 Teilräume von V . Dann sind

- $U_1 \cap U_2$ und
- $U_1 + U_2 =_{df} \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$

auch Teilräume von V .

② Sei U Teilraum eines endlichdimensionalen Vektorraumes V , dann gilt

$$\dim U \leq \dim V$$

③ Seien U_1, U_2 Teilräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes V , dann gilt

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$