Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 23 (03.06.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung (Algebra):

- Wiederholung: Teilraum / Untervektorraum
- Lineares Gleichungssystem / Linearkombination
- Erzeugendensystem / Basis

Teilraum, Untervektorraum

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$. U heißt Teilraum von V wenn folgende Bedingungen gelten:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\vec{v}, \vec{w} \in U \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in U$
3. $s \in K, \vec{v} \in U \Rightarrow (s \cdot \vec{v}) \in U$

Teilraum, Untervektorraum

Sei $(K,+,\cdot)$ Körper und $(V,+,\cdot)$ ein K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$. U heißt Teilraum von V wenn folgende Bedingungen gelten:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\vec{v}, \vec{w} \in U \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in U$
3. $s \in K, \vec{v} \in U \Rightarrow (s \cdot \vec{v}) \in U$

Aufgaben

Sei $\langle V,+,\cdot \rangle$ ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Teilräume von V. Zeigen Sie:

$$U_1 \cup U_2 \textit{ ist Teilraum von } V \Rightarrow U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$$

Tipp: Führen Sie einen Wiederspruchsbeweis.

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & & & = & -2 \\ & & y & + & z & = & 4 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}$$

Kann durch die Koeffizientenmatrix

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & & & = & -2 \\ & & y & + & z & = & 4 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}$$

Kann durch die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

Umformung von Gleichungssystemen

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems über K ändert sich nicht, wenn man

1. zwei Gleichungen vertauscht
2. das c-fache einer Gleichung zu einer anderen addiert ($c \in K$)
3. eine Gleichung mit $c \in K \setminus \{0\}$ multipliziert

Umformung von Gleichungssystemen

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems über K ändert sich nicht, wenn man

1. zwei Gleichungen vertauscht
2. das c-fache einer Gleichung zu einer anderen addiert ($c \in K$)
3. eine Gleichung mit $c \in K \setminus \{0\}$ multipliziert

Elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformungen auf Matrizen aus $K^{n\times m}$ sind Abbildungen der folgen Form (für $1 \leq k, l \leq n$)

1. $V_{k,l}: \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$: „Vertausche k-te und l-te Zeile einer Matrix"
2. $A_{k,l}(c): \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$ für $c \in K$: „Addiere das c-fache der k-ten Zeile zur l-ten Zeile einer Matrix"
3. $M_k(c): \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$ für $c \in K \setminus \{0\}$ „Multipliziere die k-te Zeile einer Matrix mit c"

Elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformungen auf Matrizen aus $K^{n\times m}$ sind Abbildungen der folgen Form (für $1 \leq k, l \leq n$)

1. $V_{k,l}: \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$: „Vertausche k-te und l-te Zeile einer Matrix“
2. $A_{k,l}(c): \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$ für $c \in K$: „Addiere das c-fache der k-ten Zeile zur l-ten Zeile einer Matrix“
3. $M_k(c): \; K^{n\times m} \to K^{n\times m}$ für $c \in K \setminus \{0\}$ „Multipliziere die k-te Zeile einer Matrix mit c“

Aufgabe

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar? Geben Sie gegebenfalls die Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{rcrcrcc} x & + & 2y & + & z & = & 6c \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 9c-3 \\ x & & & - & z & = & -12c \end{array}$$

Linearkombinationen

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum mit Vektoren $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \in V$, dann heißt $\vec{v} \in V$ Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ wenn es $s_1, ..., s_n \in K$ gibt mit

$$\vec{v} = s_1 \cdot \vec{v}_1 + ... + s_n \cdot \vec{v}_n$$

Aufgabe

- Sind die Vektoren $\vec{u} = (2, 1, 2)^t$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)^t$ und $\vec{w} = (0, 1, -1)^t$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?
- Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (2, 1, -2)^t$, $\vec{v} = (0, 5, 2)^t$ $\vec{w} = (1, 2, 1)^t$ und $\vec{z} = (3, 2, 3)^t$ des $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie $\vec{z}$ als Linearkombination $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ dar

Erzeugnisse, Erzeugendensystem

Sei $(v, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Ist $M \subseteq V$ eine Teilmenge von V, so definieren wir das Erzeugnis von M als

$$\langle M \rangle =_{df} \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \vec{v}_i \mid s_i \in K, \vec{v}_i \in M, i = 1, ..., n \right\}$$

$\langle M \rangle$ heißt auch der von M erzeugte Teilraum von V. Die Menge M heißt Erzeugendensystem von $\langle M \rangle$

Aufgabe

Seien $\vec{u} = (1, 3, -2)^t, \vec{v} = (4, 5, 6)^t$ und $\vec{w} = (3, -2, 1)$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$?

„Eine“ Charakterisierung einer Basis

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem M von V ist eine Basis für V

Aufgabe

Seien $\vec{u} = (1, 3, -2)^t, \vec{v} = (4, 5, 6)^t$ und $\vec{w} = (3, -2, 1)$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$.
Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Menge

$$W =_{df} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (x_1, x_2, x_3) \text{ mit } x_1 + x_2 = 0\}$$

ein Vektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von W.

Aufgaben

Seien die Mengen U_1, U_2 definiert durch

$$\begin{aligned} U_1 &=_{df} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \\ U_2 &=_{df} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \wedge x_1 + x_2 + x_4 = 0\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. U_1 (U_2) ist Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^4$)
2. Bestimmen Sie eine Basis für U_1 und U_2
3. Zeigen Sie die Basiseigenschaften