Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 22 (27.05.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung (Algebra):

- Kern, Bild von (Gruppen-)Homomorphismen
- Mengen mit zwei Verknüpfungen
- Vektorraum, Untervektorraum

Bild/Kern

Seien $\langle G_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle G_2, \oplus_2 \rangle$ Gruppen mit neutralen Elementen e_1, e_2 und $\varphi\colon G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus.

- $\text{Bild}(\varphi) = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1 . \varphi(x) = y\}$
- $\text{Kern}(\varphi) = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\}$

Aufgabe

Seien $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$, $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$ Monoide mit neutralen Elementen e_1, e_2 und $\varphi\colon \langle M_1, \oplus_1 \rangle \to \langle M_2, \oplus_2 \rangle$ ein Monoidhomomorphismus. Zeigen Sie

$$\varphi \textit{ ist injektiv} \Rightarrow \textit{Kern}(\varphi) = \{e_1\}$$

Ring

Eine Menge R mit den Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt Ring genau dann, wenn

- $\langle R, \oplus \rangle$ bildet eine kommutative Gruppe
- $\langle R, \odot \rangle$ bildet eine Halbgruppe
- Es gelten die Distributivgesetzte:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R. a \odot (b \oplus c) &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ \forall a, b, c \in R. (a \oplus b) \odot c &= (a \odot c) \oplus (b \odot c) \end{aligned}$$

Ist $\langle R, \odot \rangle$ ein Monoid, dann ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ Ring mit Einselement 1.

Integritätsbereich

Ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement, so heißt $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ Integritätsbereich

Körper

Ein Integritätsbereich $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ heißt Körper genau dann, wenn $\langle R \setminus \{0\}, \odot \rangle$ eine kommutative Gruppe ist.

Ring

Eine Menge R mit den Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt Ring genau dann, wenn

- $\langle R, \oplus \rangle$ bildet eine kommutative Gruppe
- $\langle R, \odot \rangle$ bildet eine Halbgruppe
- Es gelten die Distributivgesetze

Ist $\langle R, \odot \rangle$ ein Monoid, dann ist $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ Ring mit Einselement 1.

Aufgabe

Seien für $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Operatoren $\oplus \colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\odot \colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch:

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\
(a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie:

1. $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ bildet einen Ring mit Einselement.
2. $\langle R, \oplus, \odot \rangle$, mit $R =_{df} \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b = 0\}$ ist Unterring von $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$

K-Vektorraum

Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Ein K-Vektorraum ist eine Menge V zusammen mit den Abbildungen:

$$\begin{aligned} + \quad &: V \times V \to V, \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w} \\ \cdot \quad &: K \times V \to V, \quad (s, \vec{v}) \mapsto s \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

und folgenden Regeln:

1. $(V,+)$ ist kommutative Gruppe. Neutrales Element der Addition ist $\vec{0}$, inverse zu $\vec{v}$ ist $-\vec{v}$
2. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ mit dem Einselement „1“ des Körpers
3. $(s \cdot s') \cdot \vec{v} = s \cdot (s' \cdot \vec{v}), \ \forall s, s' \in K, \vec{v} \in V$
4. $(s + s') \cdot \vec{v} = (s \cdot \vec{v}) + (s' \cdot \vec{v}), \ \forall s, s' \in K, \vec{v} \in V$
5. $s \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (s \cdot \vec{v}) + (s \cdot \vec{w}) \ \forall s \in K, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Teilraum, Untervektorraum

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$. U heißt Teilraum von V wenn folgende Bedingungen gelten:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\vec{v}, \vec{w} \in U \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in U$
3. $s \in K, \vec{v} \in U \Rightarrow (s \cdot \vec{v}) \in U$

Aufgaben

Welche der folgenden Mengen M sind Teilräume des Vektorraums V?

1. $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $M =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$ und $M =_{df} \{(u, u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} \cup \{(u, v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$ und $M =_{df} \{(u, 2u, 3u) \mid u \in \mathbb{R}\} \cap \{(3v, 2v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

Ringhomomorphismen

Eine Funktion $f \colon \langle R, \oplus_R, \odot_R \rangle \to \langle S, \oplus_S, \odot_S \rangle$ heißt Ringhomomorphismus gdw. $\forall a, b \in R$:

1. $f(a \oplus_R b) = f(a) \oplus_S f(b)$
2. $f(a \odot_R b) = f(a) \odot_S f(b)$
3. $f(1_R) = 1_S$ falls S und R Ringe mit Einselement sind.

Aufgabe

Sei $U =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterring von $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h \colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) =_{df} a$$

ein Ringhomomorphismus von $\langle U, +, \cdot \rangle$ nach $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ist.