Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 21 (20.05.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung (Algebra):

- Halbgruppen, Monoide
- Gruppen
- Symmetrische Gruppe
- Gruppenhomomorphismen
- Untergruppen

Monoid

Eine algebraische Struktur $\langle G, \oplus \rangle$ über die (Träger)Menge G und der zweistelligen Verknüpfung $\oplus$: $G \times G \to G$ heißt Monoid genau dann, wenn gilt:

1. $\oplus$ ist assoziativ ($\langle G, \oplus \rangle$ ist Halbgruppe)
2. $\langle G, \oplus \rangle$ besitzt ein neutrales Element ($\langle G, \oplus \rangle$ ist Monoid)
3. $\oplus$ ist kommutativ ($\langle G, \oplus \rangle$ ist kommutativer Monoid)

(Kommutativer) Monoid?

- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ Halbgruppe? ✓ Monoid? ✓ Kommutativ? ✓
- $\langle A^+, \cdot \rangle$ Halbgruppe? ✓ Monoid? × Kommutativ? ×
- $\langle \mathbb{Z}, - \rangle$ Halbgruppe? × Monoid? × Kommutativ? ×

Neutrale Elemente

Seien $e, e' \in G$ neutrale Elemente. Zeigen Sie:

$$e = e'$$

Gruppe

Ein (kommutativer) Monoid $\langle G, \oplus \rangle$ in dem zu jedem Element $a \in G$ ein inverses Element $a^-1 \in G$ existiert heißt (kommutative) Gruppe.

Gruppen

Die folgende Verknüpfungstafel einer Gruppe mit den sechs Elementen $\{a, b, c, x, y, z\}$ lässt sich auf genau eine Weise vervollständigen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge und begründen Sie, dass diese in eindeutiger Weise festliegen.

$\circ$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			c
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Gruppeneigenschaften

Sei $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\oplus\colon G \times G \to G$ durch

$$a \oplus b =_{df} a \cdot x \cdot b$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe ist
2. Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle for $\oplus$ für $\langle G, \cdot \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$

Symmetrische Gruppe

Für $n \geq 2$ bildet $S_n =_{df} \{f \mid f\colon \{1 \cdots n\} \to \{1 \cdots n\}, f \text{ bijektiv}\}$ mit der Komposition $\circ$ als Operation eine Gruppe. Elemente von S_n werden Permutationen genannt.

Zyklenschreibweise S_3

Die Menge aller Permutationen $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ ist

$$S_3 = \{id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Komposition von Permutationen

Komposition von zwei Permutationen:

- $(1\ 4\ 2) \circ (2\ 3) = (2\ 3\ 1\ 4)$
- $(1\ 2\ 3\ 4) \circ (1\ 3\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3)$

(Gruppen-)Homomorphismus

Seien $\langle G_1, \oplus_1\rangle$ und $\langle G_2, \oplus_2\rangle$ Gruppen und $f\colon G_1 \to G_2$ eine Abbildung, dann heißt f `(Gruppen-)Homomorphismus` genau dann, wenn gilt

$$\forall a, b \in G . f(a \oplus_1 b) = f(a) \oplus_2 f(b)$$

Gruppenhomomorphismus

Sei $\langle G, \oplus\rangle$ eine Gruppe. Für ein beliebiges $a \in G$ ist $\lambda_a\colon G \to G$ definiert durch

$$\lambda_a(x) =_{df} a \oplus x$$

Offensichtlich ist

$$T =_{df} \{\lambda_a \mid a \in G\}$$

mit der Funktionskomposition eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $h\colon \langle G, \oplus\rangle \to \langle T, \circ\rangle$, mit $h(a) =_{df} \lambda_a$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Untergruppe

Ist $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe und $H \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G, so dass $\langle H, \oplus \rangle$ auch eine Gruppe ist, so nennen wir $\langle H, \oplus \rangle$ Untergruppe von $\langle G, \oplus \rangle$ $(H \leq G)$

Untergruppe

Sei $n \geq 2$ und S_n die symmetrische Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$U_n =_{df} \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = 1\}$$

Untergruppe von S_n ist.