Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 19 (06.05.2015)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Wiederholung: Noethersche Induktion
- Ordnungsrelationen, Teilstrukturen
- Verbände

Noethersche Induktion

Funktion `reverse`

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}\colon A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.

Aufgabe zur `reverse`-Funktion

Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Noethersche Induktion

Funktion reverse

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}: A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.

Aufgabe zur reverse-Funktion

Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Teilwortbeziehung

Sei A ein Alphabet, und seien $v, w \in A^*$ Wörter über A. Die Teilwortbeziehung $v \leqslant w$ ist wie folgt formal definiert:

$$v \leqslant w \Leftrightarrow_{df} \exists u_1, u_2 \in A^*. u_1 \cdot v \cdot u_2 = w.$$

Partielle Ordnung

Eine homogene Relation $\preceq \subseteq A \times A$ heißt partielle Ordnung oder auch Halbordnung, gdw.

1. $\preceq$ ist reflexiv: $\forall a \in A. a \preceq a$
2. $\preceq$ ist antisymmetrisch: $\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$
3. $\preceq$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_3 \Rightarrow a_1 \preceq a_3$

Partielle Ordnung

Eine homogene Relation $\preceq \subseteq A \times A$ heißt partielle Ordnung oder auch Halbordnung, gdw.

1. $\preceq$ ist reflexiv: $\forall a \in A . a \preceq a$
2. $\preceq$ ist antisymmetrisch: $\forall a_1, a_2 \in A . a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$
3. $\preceq$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_3 \Rightarrow a_1 \preceq a_3$

Quasiordnung

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heißt Quasiordnung, gdw.

1. $\precsim$ ist reflexiv: $\forall a \in A . a \precsim a$
2. $\precsim$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Partielle Ordnung

Eine homogene Relation $\preceq \subseteq A \times A$ heißt partielle Ordnung oder auch Halbordnung, gdw.

1. $\preceq$ ist reflexiv: $\forall a \in A . a \preceq a$
2. $\preceq$ ist antisymmetrisch: $\forall a_1, a_2 \in A . a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$
3. $\preceq$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \preceq a_2 \wedge a_2 \preceq a_3 \Rightarrow a_1 \preceq a_3$

Quasiordnung

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heißt Quasiordnung, gdw.

1. $\precsim$ ist reflexiv: $\forall a \in A . a \precsim a$
2. $\precsim$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Quasiordnung, Partielle Ordnung?

Welche der folgenden Ordnungen ist eine partielle Ordnung und/oder eine Quasiordnung?

1. $(\mathbb{N}, |) =_{df} \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} . n \cdot k = m\}$
2. $(\mathbb{Z}, |) =_{df} \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} . n \cdot k = m\}$

Quasi- und Striktordnung

Quasiordnung

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heißt Quasiordnung, gdw.

1. $\precsim$ ist reflexiv: $\forall a \in A. a \precsim a$
2. $\precsim$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 \precsim a_2 \land a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Quasi- und Striktordnung

Quasiordnung

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heißt Quasiordnung, gdw.

1. $\precsim$ ist reflexiv: $\forall a \in A . a \precsim a$
2. $\precsim$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Striktordnung

Zu einer Quasiordnung $\precsim$ ist die zugehörige Striktordnung definiert durch

$$a_1 \prec a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \precsim a_2 \wedge a_1 \not\sim a_2$$

1. $\prec$ ist asymmetrisch: $\forall a_1, a_2 \in A . a_1 \prec a_2 \Rightarrow a_2 \not\prec a_1$
2. $\prec$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A . a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_3 \Rightarrow a_1 \prec a_3$

Quasi- und Striktordnung

Quasiordnung

Eine homogene Relation $\precsim \subseteq A \times A$ heißt Quasiordnung, gdw.

1. $\precsim$ ist reflexiv: $\forall a \in A. a \precsim a$
2. $\precsim$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Striktordnung

Zu einer Quasiordnung $\precsim$ ist die zugehörige Striktordnung definiert durch

$$a_1 \prec a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \precsim a_2 \wedge a_1 \not\sim a_2$$

1. $\prec$ ist asymmetrisch: $\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \prec a_2 \Rightarrow a_2 \not\prec a_1$
2. $\prec$ ist transitiv: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_3 \Rightarrow a_1 \prec a_3$

Nachbarschaftsordnung

Die Nachbarschaftsordnung $\prec_N$ zu einer Striktordnung $\prec$ ist definiert durch

$$a_1 \prec_N a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \prec a_2 \wedge \nexists a_3 \in A.\ a_1 \prec a_3 \prec a_2$$

Minimales und maximales / kleinstes und größtes Element

Minimale, maximale Elemente

Sei $\precsim \subseteq A \times A$ Quasiordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $b \in B$ heißt

- minimales Element in $B \Leftrightarrow_{df} \nexists b' \in B.\ b' \prec b$
- maximales Element in $B \Leftrightarrow_{df} \nexists b' \in B.\ b \prec b$

Kleinstes, größtes Element

Sei $\precsim \subseteq A \times A$ Quasiordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $b \in B$ heißt

- kleinstes Element in $B \Leftrightarrow_{df} \forall b' \in B.\ b \precsim b'$
- größtes Element in $B \Leftrightarrow_{df} \forall b' \in B.\ b' \precsim b$

Obere und untere Schranken

Obere Schranke

Sei $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung und $X \subseteq M$.

- $y \in M$ heißt obere Schranke von $X \Leftrightarrow_{df} \forall x \in X.\ x \preceq y$
- Die Menge der oberen Schranken von X ist $\mathcal{O}_X =_{df} \{y \in M \mid X \preceq y\}$
- Besitzt $\mathcal{O}_X$ ein kleinstes Element, so wird dieses mit $\sup(X)$ bezeichnet.

Untere Schranke

Sei $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung und $X \subseteq M$.

- $y \in M$ heißt untere Schranke von $X \Leftrightarrow_{df} \forall x \in X.\ y \preceq x$
- Die Menge der oberen Schranken von X ist $\mathcal{U}_X =_{df} \{y \in M \mid y \preceq X\}$
- Besitzt $\mathcal{U}_X$ ein größtes Element, so wird dieses mit $\inf(X)$ bezeichnet.

Hasse-Diagramm

Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation

Sei $V =_{df} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Stellen Sie $(V, |)$ als Hasse-Diagramm dar.
2. Bestimmen Sie die minimalen und maximalen Elemente für $\{2, 3, 4, 5, 6\}$
3. Bestimmen Sie $\mathcal{O}_{\{2,3\}}$, $\mathcal{U}_{\{2,3\}}$ $\mathcal{O}_{\{3,4\}}$ und $\mathcal{U}_{\{3,4\}}$

Verbände

Verband

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt Verband $\Leftrightarrow_{df}$

$$\forall x, y \in V.\ \inf\{x, y\} \text{ existiert} \wedge \sup\{x, y\} \text{ existiert.}$$

Vollständiger Verband

Eine partielle Ordnung $(V, \preceq)$ heißt vollständiger Verband $\Leftrightarrow_{df}$

$$\forall X \subseteq V.\ \inf\{X\} \text{ existiert} \wedge \sup\{X\} \text{ existiert.}$$

Verbände

Teilstrukturen

Sei $(V, \preceq)$ ein Verband und $x \in V$ beliebig. Zeigen Sie, dass $V_x =_{df} \{v \in V \mid x \preceq v\}$ ein Verband ist.

Distributiver Verband

Algebraischer Verband

Sei $x \curlywedge y =_{df} \inf\{x, y\}$, $x \curlyvee y =_{df} \sup\{x, y\}$ und $(V, \preceq)$ ein Verband. $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ bildet einen algebraischen Verband mit folgenden Eigenschaften der binären Operatoren $\curlywedge, \curlyvee$:

- Assoziativität
- Kommutativität
- Absorption

Distributiver Verband

Ein algebraischer Verband $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ heißt distributiv, genau dann wenn für alle $x, y, z \in V$ gilt:

1. $x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$
2. $x \curlywedge (y \curlyvee z) = (x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z)$

Distributive Verbände

Distributiver Verband

Sei $V =_{df} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bildet $(V, |)$ einen distributiven Verband?

Strukturverträgliche Abbildungen

Ordnungshomomorphismen

Seien $(A, \preceq_A)$ und $(B, \preceq_B)$ Verbände und $f : A \to B$ eine Funktion. f heißt Ordnungshomomorphismus genau dann, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$a_1 \preceq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \preceq_B f(a_2)$$

$\curlyvee$-, $\curlywedge$-Homomorphismen

Seien $(A, \curlyvee_A, \curlywedge_A)$ und $(B, \curlyvee_B, \curlywedge_B)$ algebraische Verbände und $f : A \to B$ eine Funktion.

- f heißt $\curlyvee$-Homomorphismus genau dann, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$f(a_1 \curlyvee_A a_2) = f(a_1) \curlyvee_B f(a_2)$$

- f heißt $\curlywedge$-Homomorphismus genau dann, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$f(a_1 \curlywedge_A a_2) = f(a_1) \curlywedge_B f(a_2)$$

$\curlyvee$-, $\curlywedge$-Homomorphismen

Sei $(V, \curlyvee, \curlywedge)$ ein distributiver Verband, $a, b \in V$ mit $a \preceq b$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon V \to V$, mit

$$f(x) =_{df} (x \curlyvee a) \curlywedge b$$

ein $\curlyvee$-,$\curlywedge$-Homomorphismus ist.

Ordnungs-, $\curlyvee$-, $\curlywedge$-Homomorphismen

Handelt es sich bei der Funktion $h\colon (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, |)$, mit

$$h(n) =_{df} n + 3$$

um einen Ordnungs-, $\curlyvee$- bzw. $\curlywedge$-Homomorphismus?