Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 18 (29.04.2015)

Info zur ersten Abgabe

Erinnerung:

Am 06.05. zwischen 14–16 Uhr ist Fachschaftsvollversammlung $\Rightarrow$ Keine Lehrveranstaltung. Abgabe kann per Mail erfolgen.

10–12 Uhr Übung findet statt.

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Induktives ...
  - Definieren
  - Beweisen
    - Vollständig
    - Verallgemeinert
    - Strukturelle
    - Noethersch

Äquivalenzrelation

Wiederholung zu Äquivalenzrelationen

Sei $R \subseteq M \times M$ ein Quasiordnung auf M. Zeigen Sie $R \cap R^{-1}$ ist eine Äquivalenzrelation

Quasiordnung

Eine homogene Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Quasiordnung auf M, gdw.

- R ist reflexiv: $\forall a \in M.(a, a) \in R$
- R ist transitiv: $\forall a, b, c \in M.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Natürliche Zahle

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kann induktiv beschrieben werden

Peano-Axiome

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}.\exists m \in \mathbb{N}.m = s(n)$
3. $\nexists n \in \mathbb{N}.0 = s(n)$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N}.n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m)$
5. $(\forall M \subseteq \mathbb{N}.0 \in M \wedge \forall n \in \mathbb{N} n \in M \Rightarrow s(n) \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$

Operationen auf natürlichen Zahlen

Addition

- $0 + m = m$
- $s(n) + m = s(n + m)$

Multiplikation

- $0 \cdot m = 0$
- $s(n) \cdot m = m + (n \cdot m)$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 =$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 = 1$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 = 1$
- $n^{s(m)} =$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 = 1$
- $n^{s(m)} = n \cdot n^m$

Fakultät: $n!$

- $0! = 1$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 = 1$
- $n^{s(m)} = n \cdot n^m$

Fakultät: $n!$

- $0! = 1$
- $s(n)! =$

Aufgaben: Induktives Definieren

Exponentiation: n^k

- $n^0 = 1$
- $n^{s(m)} = n \cdot n^m$

Fakultät: $n!$

- $0! = 1$
- $s(n)! = s(n) \cdot n!$

Kardinalität der Potenzmenge

Geben Sie eine induktive Definition für die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge M an.

Vollständige Induktion – I

Geometrische Summe

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Teilbarkeit

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}.5|(6^n + 4) \Leftrightarrow_{df} \exists k \in \mathbb{N}.6^n + 4 = 5k$$

Vollständige Induktion – II

Fibonacci

Die Fibonaccifunktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathrm{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathrm{fib}(n) &=_{df} \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} (\mathrm{fib}(i))^2 = \mathrm{fib}(n) \cdot \mathrm{fib}(n+1).$$

Verallgemeinerte Induktion

Fibonacci

Die Fibonaccifunktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib}(0) &=_{df} 0\\
\mathrm{fib}(1) &=_{df} 1\\
\mathrm{fib}(n) &=_{df} \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \quad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{fib}(n) \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

Strukturelle Induktion: Boolesche Terme

Erinnerung: Syntax Boolescher Terme

$$\mathcal{BT} ::= X \in \mathcal{V} \mid \mathsf{T} \mid \mathsf{F} \mid \neg\mathcal{BT} \mid (\mathcal{BT} \wedge \mathcal{BT}) \mid (\mathcal{BT} \vee \mathcal{BT})$$

Strukturelle Induktion: Boolesche Terme

Erinnerung: Syntax Boolescher Terme

$$\mathcal{BT} ::= X \in \mathcal{V} \mid \mathsf{T} \mid \mathsf{F} \mid \neg\mathcal{BT} \mid (\mathcal{BT} \wedge \mathcal{BT}) \mid (\mathcal{BT} \vee \mathcal{BT})$$

Erinnerung: Semantik Boolescher Terme

- $[\![\mathsf{T}]\!]_B(\beta) =_{df} w$
- $[\![\mathsf{F}]\!]_B(\beta) =_{df} f$
- $[\![X]\!]_B(\beta) =_{df} \beta(X)$
- $[\![\neg t]\!]_B(\beta) =_{df} \dot{\neg}([\![t]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \wedge t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![t_2]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \vee t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\vee} [\![t_2]\!]_B(\beta))$

mit $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ Junktor-Semantik, $\{\neg, \wedge, \vee\}$ Junktor-Syntax

Strukturelle Induktion

Erinnerung: Semantik Boolescher Terme

- $[\![\mathrm{T}]\!]_B(\beta) =_{df} w$
- $[\![\mathrm{F}]\!]_B(\beta) =_{df} f$
- $[\![X]\!]_B(\beta) =_{df} \beta(X)$
- $[\![\neg t]\!]_B(\beta) =_{df} \dot{\neg}([\![t]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \wedge t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![t_2]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \vee t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\vee} [\![t_2]\!]_B(\beta))$

Boolesche Terme

Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

Strukturelle Induktion

Erinnerung: Semantik Boolescher Terme

- $[\![\mathrm{T}]\!]_B(\beta) =_{df} w$
- $[\![\mathrm{F}]\!]_B(\beta) =_{df} f$
- $[\![X]\!]_B(\beta) =_{df} \beta(X)$
- $[\![\neg t]\!]_B(\beta) =_{df} \dot{\neg}([\![t]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \wedge t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![t_2]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \vee t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\vee} [\![t_2]\!]_B(\beta))$

Boolesche Terme

Zeigen Sie, dass für jeden Booleschen Term $t \in \mathcal{BT}$ ein semantisch äquivalenter Term t' existiert, der weder T noch F enthält.

Strukturelle Induktion

Erinnerung: Semantik Boolescher Terme

- $[\![\mathsf{T}]\!]_B(\beta) =_{df} w$
- $[\![\mathsf{F}]\!]_B(\beta) =_{df} f$
- $[\![X]\!]_B(\beta) =_{df} \beta(X)$
- $[\![\neg t]\!]_B(\beta) =_{df} \dot{\neg}([\![t]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \wedge t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![t_2]\!]_B(\beta))$
- $[\![t_1 \vee t_2]\!]_B(\beta) =_{df} ([\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\vee} [\![t_2]\!]_B(\beta))$

Boolesche Terme

Zeigen Sie, dass für alle negationsfreien Booleschen Terme $t \in \mathcal{BT}$ gilt:

$$\#_V(t) \leq 2 \cdot \#_O(t) + 1,$$

wobei $\#_V(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Variablen und $\#_O(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Operatoren bezeichnet.

Noethersche Induktion

Funktion `reverse`

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}\colon A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.
Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Noethersche Induktion

Funktion `reverse`

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}\colon A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.
Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Teilwortbeziehung

Sei A ein Alphabet, und seien $v, w \in A^*$ Wörter über A. Die Teilwortbeziehung $v \leqslant w$ ist wie folgt formal definiert:

$$v \leqslant w \Leftrightarrow_{df} \exists u_1, u_2 \in A^*. u_1 \cdot v \cdot u_2 = w.$$

$\leqslant$ ist eine Noethersche partielle Ordnung.