Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 17 (22.04.2015)

Info zur ersten Abgabe

Am 06.05. von 14-16 Uhr ist Fachschaftsvollversammlung
$\Rightarrow$ Keine Lehrveranstaltung. Abgabe kann per Mail erfolgen.

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Relationen ...
  - Äquivalenzrelationen
  - Partitionen
- ... und Funktionen
  - Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
  - Funktionskomposition

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a,b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Kartesisches Produkt

Sei $\mathcal{A} = \{1, \mathit{Telefon}\}$ und $\mathcal{B} = \{2, \mathit{Hund}\}$, dann ist

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} =$$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Kartesisches Produkt

Sei $\mathcal{A} = \{1, \mathit{Telefon}\}$ und $\mathcal{B} = \{2, \mathit{Hund}\}$, dann ist

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(1, 2), (1, \mathit{Hund}), (\mathit{Telefon}, 2), (\mathit{Telefon}, \mathit{Hund})\}$$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Relation

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, mit $(a, a') \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq a'$

$\Rightarrow R =$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Relation

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, mit $(a, a') \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq a'$

$\Rightarrow$ $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Relation

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, mit $(a, a') \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq a'$

$\Rightarrow$ $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- $\mathcal{A} = \{1, 4\}, \mathcal{B} = \{2, 3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mit $(a, b) \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq b$

$\Rightarrow$ $R =$

Relationen

Relation

Eine Relation stellt Beziehungen zwischen Elementen von Mengen her:

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ mit } (\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{df} \{(a,b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\})$$

für Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

Beispiel: Relation

- $\mathcal{A} = \{1,2,3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, mit $(a,a') \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq a'$

$\Rightarrow R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

- $\mathcal{A} = \{1,4\}, \mathcal{B} = \{2,3\}, R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mit $(a,b) \in R \Leftrightarrow_{df} a \leq b$

$\Rightarrow R = \{(1,2),(1,3)\}$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Produktrelation

Seien R, R' zwei Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Die Produktrelation ist definiert als:

$$R \odot R' =_{df} \{(a, c) \mid \exists b \in \mathcal{B}.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$$

Beispiel: Produktrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Produktrelation

Seien R, R' zwei Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Die Produktrelation ist definiert als:

$$R \odot R' =_{df} \{(a, c) \mid \exists b \in \mathcal{B}.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$$

Beispiel: Produktrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen und $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Produktrelation

Seien R, R' zwei Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Die Produktrelation ist definiert als:

$$R \odot R' =_{df} \{(a, c) \mid \exists b \in \mathcal{B}.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$$

Beispiel: Produktrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen und $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen, mit $R = " \leq ", R' = " \geq "$.

$$R \odot R' =$$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Produktrelation

Seien R, R' zwei Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Die Produktrelation ist definiert als:

$$R \odot R' =_{df} \{(a,c) \mid \exists b \in \mathcal{B}.(a,b) \in R \land (b,c) \in R'\}$$

Beispiel: Produktrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1,2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2,3,4\}$ Mengen und $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen, mit $R = " \leq ", R' = " \geq "$.

$$R \odot R' = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Umkehrrelation

Sei R eine Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Die Umkehrrelation ist definiert als:

$$R^{-1} =_{df} \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Umkehrrelation

Sei R eine Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Die Umkehrrelation ist definiert als:

$$R^{-1} =_{df} \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

Beispiel: Umkehrrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen und
$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen, mit $R = " \leq ", R' = " \geq "$.

$$R \odot R' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Umkehrrelation

Sei R eine Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Die Umkehrrelation ist definiert als:

$$R^{-1} =_{df} \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

Beispiel: Umkehrrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen und $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen, mit $R = " \leq ", R' = " \geq "$.

$$R \odot R' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$(R \odot R')^{-1} =$$

(Binäre) Produkt- und Umkehrrelation

Umkehrrelation

Sei R eine Relationen mit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Die Umkehrrelation ist definiert als:

$$R^{-1} =_{df} \{(b, a)|(a, b) \in R\}$$

Beispiel: Umkehrrelation

Seien $\mathcal{A} = \{1, 2\}, \mathcal{B} = \{3\}, \mathcal{C} = \{2, 3, 4\}$ Mengen und
$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}, R' \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ Relationen, mit $R = " \leq ", R' = " \geq "$.

$$R \odot R' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$(R \odot R')^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Eine binäre homogene Relation $\sim \subseteq M \times M$ auf einer beliebigen Menge M heißt Äquivalenzrelation gdw.

1. $\sim$ ist reflexiv, d.h. $\forall x \in M. x \sim x$.
2. $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in M. (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.
3. $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in M. x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Eine binäre homogene Relation $\sim \subseteq M \times M$ auf einer beliebigen Menge M heißt Äquivalenzrelation gdw.

1. $\sim$ ist reflexiv, d.h. $\forall x \in M . x \sim x$.
2. $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in M . (x \sim y \land y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.
3. $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in M . x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Äquivalenzrelation

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch:

$$x \equiv_z y \Leftrightarrow_{df} z | (x - y).$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_z$ eine Äquivalenzrelation ist.

Äquivalenzklassen

Äquivalenzrelation

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge und $\sim \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim$ über der Menge $\mathcal{A}$ ist definiert durch

$$[a]_\sim =_{df} \{a' \in \mathcal{A} | a \sim a'\}$$

Beispiel: Äquivalenzklasse

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch: $x \equiv_z y \Leftrightarrow_{df} z|(x-y)$

- $[23]_{\equiv_3} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 3|(23-y)\}$
- $[23]_{\equiv_3} =$

Äquivalenzklassen

Äquivalenzrelation

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge und $\sim \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim$ über der Menge $\mathcal{A}$ ist definiert durch

$$[a]_\sim =_{df} \{a' \in \mathcal{A} | a \sim a'\}$$

Beispiel: Äquivalenzklasse

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch: $x \equiv_z y \Leftrightarrow_{df} z|(x - y)$

- $[23]_{\equiv_3} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 3|(23 - y)\}$
- $[23]_{\equiv_3} = \{-4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Partition einer Menge $\mathcal{M}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, dann ist $P \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{M})$ eine Partition von $\mathcal{M}$ genau dann wenn gilt:

- $P \neq \emptyset$
- $\bigcup_{M' \in P} M' = \mathcal{M}$
- $\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in P. \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$

Beispiel: Partition?

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ Ist P Partition, mit ...

- $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Partition einer Menge $\mathcal{M}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, dann ist $P \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{M})$ eine Partition von $\mathcal{M}$ genau dann wenn gilt:

- $P \neq \emptyset$
- $\bigcup\limits_{M' \in P} M' = \mathcal{M}$
- $\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in P . \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$

Beispiel: Partition?

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ Ist P Partition, mit ...

- $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ $\times$(Nicht disjunkt)
- $P = \{\{1\}, \{2\}\}$

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Partition einer Menge $\mathcal{M}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, dann ist $P \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{M})$ eine Partition von $\mathcal{M}$ genau dann wenn gilt:

- $P \neq \emptyset$
- $\bigcup\limits_{M' \in P} M' = \mathcal{M}$
- $\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in P. \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$

Beispiel: Partition?

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ Ist P Partition, mit ...

- $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ $\times$(Nicht disjunkt)
- $P = \{\{1\}, \{2\}\}$ $\times$(Nicht überdeckend)
- $P = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Partition einer Menge $\mathcal{M}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, dann ist $P \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{M})$ eine Partition von $\mathcal{M}$ genau dann wenn gilt:

- $P \neq \emptyset$
- $\bigcup\limits_{M' \in P} M' = \mathcal{M}$
- $\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in P. \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$

Beispiel: Partition?

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ Ist P Partition, mit ...

- $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ × (Nicht disjunkt)
- $P = \{\{1\}, \{2\}\}$ × (Nicht überdeckend)
- $P = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ✓

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Durch ÄR induzierte Partition

Sei $\sim: A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A, dann bildet die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition

$$A/\sim =_{df} \{[a]_\sim \mid a \in A\}$$

Durch Partition induzierte ÄR

Sei $P \subseteq \mathfrak{P}(A)$ eine Partition auf der Menge A, dann ist

$$\sim_P =_{df} \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid \exists A' \in P. a_1, a_2 \in A'\}$$

Äquivalenzrelationen und Funktionen

Äquivalenzrelationen und Funktionen

Sei $f: A \to B$ eine Funktion und $\sim_f$ Äquivalenzrelation über A, dann gilt

$$a_1 \sim_f a_2 \Leftrightarrow_{df} f(a_1) = f(a_2)$$

Urbildpartition

Sei $f: A \to B$ eine Funktion und $\sim_f$ Äquivalenzrelation über A, dann ist die durch f induzierte Urbildpartition

$$\{f^{-1}(b) | b \in f(A)\}$$

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen/Funktionen/Urbildpartition

Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $\sim_f$ Äquivalenzrelation über A, dann gilt

$$a_1 \sim_f a_2 \Leftrightarrow_{df} f(a_1) = f(a_2)$$

Urbildpartition: $\{f^{-1}(b) | b \in f(A)\}$

Urbildpartition, Äquivalenzrelation

Betrachten sie die Funktion $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f(x) =_{df} x^2 \mod 5.$$

1. Geben Sie die Urbildpartition P zu f an.
2. Geben Sie die durch P induzierte Äquivalenzrelation an.

Kleinste enthaltende Äquivalenzrelationen

Urbildpartition, Äquivalenzrelation

Sei $M =_{df} \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Betrachten Sie die Relation $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,5), (3,3), (3,4), (4,4)\} \subseteq M \times M$.

1. Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation R' auf M an, die R enthält.
2. Sei $S \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation. Ist es immer möglich, S zu einer Äquivalenzrelation durch Hinzufügen von Elementen zu ergänzen?

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definitionen

- $f : A \to B$ ist injektiv gdw.

$$\forall a_1, a_2, \in A. a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

- $f : A \to B$ ist surjektiv gdw.

$$\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$$

- $f : A \to B$ ist bijektiv gdw. f ist injektiv und f ist surjektiv.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f_1(z) =_{df} 3z - 1$
$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f_2(z) =_{df} 3z^2 - 1$
$f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f_3(q) =_{df} 3q - 1$

Definitionen

- $f : A \to B$ ist injektiv gdw.

$$\forall a_1, a_2, \in A.a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

- $f : A \to B$ ist surjektiv gdw.

$$\forall b \in B.\exists a \in A.f(a) = b$$

- $f : A \to B$ ist bijektiv gdw. f ist injektiv und f ist surjektiv.

Injektivität, Surjektivität

Injektivität und Surjektivität

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f((n, m)) =_{df} n + m$$

surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion, und sei $g : B \to C$ eine surjektive Funktion.
Beweisen oder widerlegen Sie: $g \circ f : A \to C$ (Erinnerung: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$) ist bijektiv.

Zusatzaufgaben

- Sei $\sim$: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, mit
  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow_{df} a \cdot d = b \cdot c$.
  Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation
- Sei $P =_{df} \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$ eine Partition von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Geben Sie die durch P implizierte Äquivalenzrelation an.
- Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $f(x, y) =_{df} (x \cdot y, \frac{x}{y})$ injektiv und/oder surjektiv