Mafl 1 Repetitorium – Übungen

M. Sc. Dawid Kopetzki

KW 16 (15.04.2015)

Über mich

- E-Mail: `dawid.kopetzki@tu-dortmund.de`
- Büro: OH 14, R 108
- Sprechstunde: Nach Vereinbarung (per E-Mail)!

Folien: Inhalten aus der VL Folien 14/15,
Repetitorium SS14 (Dipl. Inf. Malte Isberner/ Dr. Oliver Rüthing).

Über Euch

Ein paar Informationen über euch

Wer hat ...

Über Euch

Ein paar Informationen über euch

Wer hat ...

- MafI1 schon gehört?

Über Euch

Ein paar Informationen über euch

Wer hat ...

- MafI1 schon gehört?
- die Studienleistung?

Über Euch

Ein paar Informationen über euch

Wer hat ...

- MafI1 schon gehört?
- die Studienleistung?
- an mindestens einer Klausur teilgenommen?

Organisatorisches

Studienleistung

- Abgabe dreier Probeklausurabschnitte (2 Klausuren im Netz)
  - Jeweils Aufgaben 1-3, 4-6, 7-9
- Abgabetermine: 06.05., 03.06., 01.07.
- Studienleistung: 3 Abgaben

Ablauf der Übung I

Meine Vorstellung:

- Keine "Fragestunde"
- Strukturiertes Vorgehen:
  - Kurze Wiederholung der Inhalte
  - Rechnen von Aufgaben (während der Übung)

Ablauf der Übung I

Meine Vorstellung:

- Keine "Fragestunde"
- Strukturiertes Vorgehen:
  - Kurze Wiederholung der Inhalte
  - Rechnen von Aufgaben (während der Übung)

$\Rightarrow$ Fast wie in der Schulzeit

Ablauf der Übung II

Also bis zum ...

- 06.05: Aussagen/Mengen, Relationen&Funktionen, Induktives Definieren/Beweisen
- 03.06: Ordnungsstrukturen, Algebra, Anfang Lin. Algebra
- 01.07: Lin. Algebra: Vektorräume, Basen, Matrizen usw.

Eure Vorstellung?

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung: Aussagen und Mengen

- Beweisen per Wahrheitstafel
- Axiomatisches Beweisen
- Semantisches Beweisen

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition Aussagen

Aussagen sind (schrift-)sprachliche Gebilde, für die es sinnvoll ist, ihnen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuzuordnen.

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition Aussagen

Aussagen sind (schrift-)sprachliche Gebilde, für die es sinnvoll ist, ihnen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuzuordnen.

Beispiele für Aussagen

- 5 ist eine Primzahl

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition Aussagen

Aussagen sind (schrift-)sprachliche Gebilde, für die es sinnvoll ist, ihnen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuzuordnen.

Beispiele für Aussagen

- 5 ist eine Primzahl

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition Aussagen

Aussagen sind (schrift-)sprachliche Gebilde, für die es sinnvoll ist, ihnen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuzuordnen.

Beispiele für Aussagen

- 5 ist eine Primzahl ✓
- Pinguine können fliegen

Definition einer Aussage

Was ist eine Aussage?

Definition Aussagen

Aussagen sind (schrift-)sprachliche Gebilde, für die es sinnvoll ist, ihnen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuzuordnen.

Beispiele für Aussagen

- 5 ist eine Primzahl ✓
- Pinguine können fliegen ×

Keine bzw. Unklare Aussagen

Diesen Sätzen kann kein klarer Wert zugewiesen werden.

Keine Aussagen

- Wie geht es dir?
- Ist 5 eine Primzahl?

Keine bzw. Unklare Aussagen

Diesen Sätzen kann kein klarer Wert zugewiesen werden.

Keine Aussagen

- Wie geht es dir?
- Ist 5 eine Primzahl?

Unklare Aussagen

- Die Person ist groß!
- Divan macht den besten Döner!

Verknüpfung von Aussagen

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen

Syntax und Semantik von Junktoren

Seien A und B zwei Aussagen, dann auch

- Negation: $\neg A$ ($\overline{A}$): ist wahr falls der Wahrheitswert von A falsch ist
- Disjunktion: $A \vee B$: Wahr falls der Wahrheitswert von A oder B wahr ist
- Konjunktion: $A \wedge B$: Wahr falls der Wahrheitswert von A und B wahr ist
- Implikation: $A \Rightarrow B$: Wahr genau dann, wenn falls A wahr ist auch B wahr ist
- Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$: Wahr genau dann, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben

Wahrheitstafel

Verknüpfung von zwei Aussagen führt zu 4 unterschiedlichen Belegungen

Wahrheitswerte von verknüpften Aussagen (Junktoren)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wahrheitstafel

Verknüpfung von zwei Aussagen führt zu 4 unterschiedlichen Belegungen

Wahrheitswerte von verknüpften Aussagen (Junktoren)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Verknüpfung von n Aussagen $\Rightarrow 2^n$ Kombinationen ...

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$
0	0	1	0
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	
1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge\mathcal{A})$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$	$\Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$	$\Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge\mathcal{A})$	$\Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$	$\Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	

Beweisen mit Wahrheitstafeln - I

Modus Ponens

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\wedge \mathcal{A})$	$\Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Beweisen mit Wahrheitstafeln - II

Kontraposition

Das Beweisprinzip der *Kontraposition* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}). \tag{KP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (KP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

Beweisen mit Wahrheitstafeln - II

Kontraposition

Das Beweisprinzip der *Kontraposition* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}). \tag{KP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (KP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

Semantische Äquivalenz

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel folgende semantische Äquivalenz:

$$\neg(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))) \equiv \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

Beweisen mit Wahrheitstafeln - III

Nachteil der Wahrheitstafeln:

- Wahrheitstafeln wachsen mit der Anzahl der Variablen exponentiell
- Man ist sehr selten an allen möglichen Belegungen der einzelnen (Teil-)Aussagen interessiert
- Meistens stellt sich die Frage: Ist die Aussage
  1. unerfüllbar?
  2. erfüllbar?
  3. eine Tautologie?

$\Rightarrow$ Ausnutzen von semantischen Äquivalenzen um Formeln zu vereinfachen

Axiome

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

Axiome (Aussagenlogik)

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\equiv$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	(Kommutativität)
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\equiv$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	$\equiv$	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	(Assoziativität)
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$	$\equiv$	$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Absorption)
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	$\equiv$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	(Distributivität)
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	$\equiv$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$	
$\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$	$\equiv$	**F**	(Negation)
$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$	$\equiv$	**T**	
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Idempotenz)
$\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	
$\neg\neg\mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Doppelnegation)
$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\equiv$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	(deMorgansche Regeln)
$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\equiv$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	
T $\wedge\ \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Neutralität)
F $\vee\ \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv$ $\qquad$ $[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}]$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\ &\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} \end{aligned}$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv && \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \quad \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv \quad (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \lor \mathcal{B}] \\
&\equiv && \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \lor \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv && (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \lor \mathcal{B}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \quad \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv \quad (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \quad (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv \quad ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist}.]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [Dist.] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathsf{T}] \\
&\equiv (\mathsf{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathsf{T}] \\
&\equiv (\mathsf{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathsf{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathsf{T}] \\
&\equiv (\mathsf{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathsf{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathsf{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv & & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv & \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv & (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv & (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv & ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv & ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv & ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathsf{T}] \\
&\equiv & (\mathsf{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathsf{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv & (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Asso.}]
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Asso.}] \\
&\equiv \neg\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B})
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
&\equiv (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Dist}.] \\
&\equiv ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} && [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} && [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
&\equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} && [\mathit{Asso}.] \\
&\equiv \neg\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) && [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}]
\end{aligned}$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} &\equiv & & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \lor \mathcal{B}] \\
&\equiv & \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv & (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \lor \mathcal{B}] \\
&\equiv & (\neg(\neg\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \land \neg\mathcal{B}] \\
&\equiv & ((\neg\neg\mathcal{A} \land \neg\mathcal{B}) \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv & ((\mathcal{A} \land \neg\mathcal{B}) \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\mathit{Dist.}] \\
&\equiv & ((\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{A}) \land (\neg\mathcal{B} \lor \neg\mathcal{A})) \lor \mathcal{B} & [\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv & (\mathrm{T} \land (\neg\mathcal{B} \lor \neg\mathcal{A})) \lor \mathcal{B} & [\mathrm{T} \land \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
&\equiv & (\neg\mathcal{B} \lor \neg\mathcal{A}) \lor \mathcal{B} & [\mathcal{A} \lor \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \lor \mathcal{A}] \\
&\equiv & (\neg\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{B}) \lor \mathcal{B} & [\mathit{Asso.}] \\
&\equiv & \neg\mathcal{A} \lor (\neg\mathcal{B} \lor \mathcal{B}) & [\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
&\equiv & \neg\mathcal{A} \lor \mathrm{T} &
\end{aligned}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{array}{rcll}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} & \equiv & & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
 & \equiv & \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
 & \equiv & (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
 & \equiv & (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
 & \equiv & ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
 & \equiv & ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathit{Dist.}] \\
 & \equiv & ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
 & \equiv & (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
 & \equiv & (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
 & \equiv & (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & [\mathit{Asso.}] \\
 & \equiv & \neg\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) & [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
 & \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \mathrm{T} & [\mathcal{A} \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}?]
\end{array}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

$$
\begin{array}{rcll}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} & \equiv & & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
& \equiv & \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}] \\
& \equiv & (\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \\
& \equiv & (\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}] \\
& \equiv & ((\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
& \equiv & ((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathit{Dist.}] \\
& \equiv & ((\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
& \equiv & (\mathrm{T} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})) \vee \mathcal{B} & [\mathrm{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}] \\
& \equiv & (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}] \\
& \equiv & (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & [\mathit{Asso.}] \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) & [\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv \mathrm{T}] \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \mathrm{T} & [\mathcal{A} \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}?] \\
& \equiv & \mathrm{T} &
\end{array}
$$

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$

Axiome (Aussagenlogik)

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\equiv$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	(Kommutativität)
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\equiv$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	$\equiv$	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	(Assoziativität)
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$	$\equiv$	$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Absorption)
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	$\equiv$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	(Distributivität)
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	$\equiv$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$	
$\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$	$\equiv$	**F**	(Negation)
$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$	$\equiv$	**T**	
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Idempotenz)
$\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	
$\neg\neg\mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Doppelnegation)
$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\equiv$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	(deMorgansche Regeln)
$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\equiv$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	
T $\wedge\ \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	(Neutralität)
F $\vee\ \mathcal{A}$	$\equiv$	$\mathcal{A}$	

Axiomatisches Beweisen – Aussagen

Z.z: $\neg(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))) \equiv \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

Axiome (Aussagenlogik)

$$
\begin{array}{rcll}
\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} & \text{(Kommutativität)} \\
\mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} & \\
(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) & \text{(Assoziativität)} \\
(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) & \\
\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Absorption)} \\
\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} & \\
\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) & \text{(Distributivität)} \\
\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) & \\
\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} & \equiv & \mathbf{F} & \text{(Negation)} \\
\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} & \equiv & \mathbf{T} & \\
\hline
\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Idempotenz)} \\
\mathcal{A} \vee \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \\
\neg\neg\mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Doppelnegation)} \\
\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B} & \text{(deMorgansche Regeln)} \\
\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} & \\
\mathbf{T} \wedge \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Neutralität)} \\
\mathbf{F} \vee \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} &
\end{array}
$$

Definition Mengen

Was sind Mengen?

Definition Menge

Unter einer Menge $\mathcal{M}$ versteht man jede Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen

Gehört ein Element m zu einer Menge schreiben wir $m \in \mathcal{M}$, sonst $m \notin \mathcal{M}$
Es wird auch das Konzept der Leeren Menge benötigt

Leere Menge

Die Menge, die keine Elemente enthält heißt leere Menge. Notation für die leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\}$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df}$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df} \forall x. x \in A \Rightarrow x \in B$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df} \forall x. x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B \Leftrightarrow_{df}$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df} \forall x.x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B \Leftrightarrow_{df} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df} \forall x . x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B \Leftrightarrow_{df} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subset B \Leftrightarrow_{df}$

Beziehungen von Mengen und die Potenzmenge

Mengen stehen untereinander in Beziehungen:

Beziehungen von Mengen

Seien A und B Mengen.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow_{df} \forall x.x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B \Leftrightarrow_{df} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subset B \Leftrightarrow_{df} A \subseteq B \wedge A \neq B$

Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ einer Menge $\mathcal{M}$ ist definiert als Menge aller Teilmengen von $\mathcal{M}$

$$\mathfrak{P}(\mathcal{M}) =_{df} \{M' |\ M' \subseteq \mathcal{M}\}$$

Verknüpfung von Mengen

Analog zu Aussagen können Mengen verknüpft werden:

Verknüpfung von Mengen

Seien A und B Mengen, dann sind folgende Verknüpfungen definiert:

- Vereinigung: $A \cup B =_{df} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Schnitt: $A \cap B =_{df} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Differenz: $A \setminus B =_{df} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz: $A \Delta B =_{df} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Komplementmenge bezüglich einer Menge M

Seien A und M Mengen, mit $A \subseteq M$, dann wird die Komplementmenge der Menge A bezüglich M definiert als:

$$A^{\complement} =_{df} M \setminus A$$

Axiomatisches Beweisen – Mengen

Δ-Distributivität

Beweisen Sie axiomatisch dass für beliebige Mengen $A, B, C \subseteq M$ gilt:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C). \qquad (\Delta\text{-Dist})$$

Zusätzlich zu den bekannten Axiomen dürfen Sie folgendes Gesetz anwenden:

$$X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}. \qquad (*)$$

Axiomatisches Beweisen – Mengen

Δ-Distributivität

Beweisen Sie axiomatisch dass für beliebige Mengen $A, B, C \subseteq M$ gilt:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C). \tag{Δ-Dist}$$

Zusätzlich zu den bekannten Axiomen dürfen Sie folgendes Gesetz anwenden:

$$X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}. \tag{*}$$

Symmetrische Differenz

Für eine zugrundeliegende Grundmenge M ist die symmetrische Differenz zweier Mengen $A, B \subseteq M$ definiert durch:

$$A \Delta B =_{df} (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement}).$$

Axiome – Mengenlehre

Δ-Dist (z.z.): $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$, $A \Delta B =_{df} (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement})$,
(*): $X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}$

Axiome (Mengenlehre)

$$
\begin{array}{rcll}
A \cap B &=& B \cap A & \text{(Kommutativität)} \\
A \cup B &=& B \cup A & \\
(A \cap B) \cap C &=& A \cap (B \cap C) & \text{(Assoziativität)} \\
(A \cup B) \cup C &=& A \cup (B \cup C) & \\
A \cap (A \cup B) &=& A & \text{(Absorption)} \\
A \cup (A \cap B) &=& A & \\
A \cap (B \cup C) &=& (A \cap B) \cup (A \cap C) & \text{(Distributivität)} \\
A \cup (B \cap C) &=& (A \cup B) \cap (A \cup C) & \\
A \cap A^{\complement} &=& \emptyset & \text{(Komplement)} \\
A \cup A^{\complement} &=& M & \\
\hline
A \cap A &=& A & \text{(Idempotenz)} \\
A \cup A &=& A & \\
A^{\complement\,\complement} &=& A & \text{(Doppelnegation)} \\
(A \cap B)^{\complement} &=& A^{\complement} \cup B^{\complement} & \text{(deMorgansche Regeln)} \\
(A \cup B)^{\complement} &=& A^{\complement} \cap B^{\complement} & \\
M \cap A &=& A & \text{(Neutralität)} \\
\emptyset \cup A &=& A &
\end{array}
$$

Semantisches Beweisen – Mengen

Semantisches Beweisen

Seien A, B, C Mengen.

1. Zeigen Sie:
$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B).$$
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
$$B \neq C \Rightarrow A \cap B \neq A \cap C.$$

Zusatzaufgabe Aussagen

Kettenimplikation

Für Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt folgendes Gesetz:

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$$

Zusatzaufgabe(n) Mengen

- Bew o. Wider: $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
- Bew o. Wider: $\mathfrak{P}(A \setminus B) = \mathfrak{P}(A) \setminus \mathfrak{P}(B)$
- Beweisen Sie: $(A \cup B) \cap (C \cap A^{\complement})^{\complement} = A \cup (B \cap C^{\complement})$