Vorlesung
Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. B. Steffen

WS 2013/14	Klausur	29. März 2014

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Pseudonym (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ______________

Ihre Klausurnote wird unter dem gewählten Pseudonym online veröffentlicht. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Pseudonym, welches nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann! Bitte schreiben Sie leserlich und prägen Sie sich Ihr gewähltes Pseudonym gut ein.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	8	10	10	10	10	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: ______________ 2. Prüfer: ______________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) [6+3+1 = 10 Punkte]

A und B seien Mengen.

1. Beweisen Sie schrittweise die Gleichheit

$$((A \cap B^{\complement}) \cap (B \cap A^{\complement})^{\complement}) \cup B = A \cup B$$

unter ausschließlicher Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Mengengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplement, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität).

Geben Sie die in den Beweisschritten verwendeten Regeln an.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
((A \cap B^{\complement}) \cap (B \cap A^{\complement})^{\complement}) \cup B &= ((A \cap B^{\complement}) \cap (B^{\complement} \cup (A^{\complement})^{\complement})) \cup B && \text{(De Morgan)}\\
&= ((A \cap B^{\complement}) \cap (B^{\complement} \cup A)) \cup B && \text{(Doppelnegation)}\\
&= ((B^{\complement} \cap A) \cap (A \cup B^{\complement})) \cup B && \text{(Kommutativität)}\\
&= (B^{\complement} \cap (A \cap (A \cup B^{\complement}))) \cup B && \text{(Assoziativität)}\\
&= (B^{\complement} \cap A) \cup B && \text{(Absorption)}\\
&= B \cup (B^{\complement} \cap A) && \text{(Kommutativität)}\\
&= (B \cup B^{\complement}) \cap (B \cup A) && \text{(Distributivität)}\\
&= M \cap (B \cup A) && \text{(Komplement für Gesamtmenge } M)\\
&= B \cup A && \text{(Neutralität)}\\
&= A \cup B && \text{(Kommutativität)}
\end{aligned}$$

2. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Mengen A und B gilt:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B.$$

Lösung:

Es gelte $A \cap B \neq \emptyset$. Nach Definition des Mengendurchschnitts gibt es dann ein Element x, das sowohl in A als auch in B vorkommt. Nach Definition der Mengendifferenz ist x kein Element von $A \setminus B$ und auch kein Element von $B \setminus A$, folglich auch kein Element von $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wegen $x \in A$ ist aber $x \in A \cup B$, so dass $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B$ gilt.

3. Beweisen oder widerlegen Sie

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

Lösung:

$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ gilt nicht. Ein einfaches Gegenbeispiel ist $A = B = \emptyset$. Es ist dann $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, aber $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelation, Quasiordnung) **[4+4=8 Punkte]**

1. Betrachten Sie die wie folgt definierte Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow_{df}\; (a \bmod 4) \mid (b \bmod 4) \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Erinnerung: Hierbei bezeichnet „|“ die Teilbarkeitsrelation auf ganzen Zahlen, die wie folgt definiert ist:

$$a \mid b \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists k \in \mathbb{Z}.\; b = a \cdot k \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(a) Beweisen Sie: R ist eine Quasiordnung.

(b) Ist R auch eine totale Quasiordnung? Begründen Sie!

Lösung:

(a) Es sind **Reflexivität** und **Transitivität** zu zeigen.

- **Reflexivität:** Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $a\,R\,a$ gilt. Offensichtlich ist $a \bmod 4 = 1 \cdot (a \bmod 4)$, also gilt $(a \bmod 4) \mid (a \bmod 4)$, was äquivalent zu $a\,R\,a$ ist.
- **Transitivität:** Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, und gelte $a\,R\,b$ sowie $b\,R\,c$. Zu zeigen ist, dass dann auch $a\,R\,c$ gilt.
  Es gilt $a\,R\,b \Leftrightarrow (a \bmod 4) \mid (b \bmod 4)$, d.h. es existiert ein $k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $b \bmod 4 = k_1 \cdot (a \bmod 4)$. Analog folgt, dass ein $k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $c \bmod 4 = k_2 \cdot (b \bmod 4)$ existiert. Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so erhält man $c \bmod 4 = \underbrace{k_1 k_2}_{\in \mathbb{Z}} \cdot (a \bmod 4)$,
  also $(a \bmod 4) \mid (c \bmod 4)$. Damit ist $a\,R\,c$ gezeigt.

(b) R ist keine totale Quasiordnung. Bei einer totalen Quasiordnung ist die vergleichbarkeit aller Elemente untereinander gegeben, d.h.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}.\; a\,R\,b \lor b\,R\,a,$$

jedoch gilt bspw. für $a = 2$, $b = 3$ weder $2\,R\,3$ noch $3\,R\,2$.

2. Sei M eine beliebige Menge, und sei $R \subseteq M \times M$ eine totale Quasiordnung auf M. Beweisen Sie:

   (a) $R \cap R^{-1}$ ist eine Äquivalenzrelation.

   (b) $R \cup R^{-1} = M \times M$.

Lösung:

(a) R ist reflexiv und transitiv. Zu zeigen ist, dass $R \cap R^{-1}$ **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv** ist.

- **Reflexivität:** Sei $a \in M$ beliebig. Aufgrund der Reflexivität von R gilt $(a, a) \in R$, damit auch $(a, a) \in R^{-1}$, und somit $(a, a) \in R \cap R^{-1}$.
- **Symmetrie:** Seien $a, b \in M$, und sei $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Zu zeigen ist, dass dann auch $(b, a) \in R \cap R^{-1}$ ist. Aus $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ folgt, dass $(a, b) \in R$ und $(a, b) \in R^{-1}$ ist. Nach Definition der Umkehrrelation sind dann auch $(b, a) \in R^{-1}$ sowie $(b, a) \in R$. Damit erhalten wir $(b, a) \in R \cap R^{-1}$.
- **Transitivität:** Seien $a, b, c \in M$, und seien $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ und $(b, c) \in R \cap R^{-1}$. Zu zeigen ist, dass dann auch $(a, c) \in R \cap R^{-1}$ gilt.
  Da $(a, b), (b, c) \in R$ gilt aufgrund der Transitivität in R auch $(a, c) \in R$. Da auch $(a, b), (b, c) \in R^{-1}$ gilt, folgt $(c, b), (b, a) \in R$. Wiederum aus der Transitivität folgt dann $(c, a) \in R$, also $(a, c) \in R^{-1}$. Damit ist $(a, c) \in R \cap R^{-1}$ gezeigt.

(b) Zu zeigen ist, dass für alle $a, b \in M$ gilt, dass $(a, b) \in R \cup R^{-1}$ ist. Dies folgt direkt aus der Totalität von R: da R total ist, gilt für alle $a, b \in M$: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$, bzw. äquivalent $(a, b) \in R \vee (a, b) \in R^{-1}$. Nach Definition der Vereinigung ist dies gleichbedeutend mit $(a, b) \in R \cup R^{-1}$.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen) **[4+6=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$5 \text{ teilt } 6^n + 4.$$

Lösung: Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion über n. Hierbei nutzen wir aus, dass die Aussage „5 teilt $6^n + 4$“ äquivalent zu

$$\exists k \in \mathbb{Z}. 6^n + 4 = 5k$$

ist.

- **Induktionsanfang** ($n = 0$): Es ist $6^0 + 4 = 1 + 4 = 5$. Offensichtlich teilt 5 sich selbst, die Aussage ist für $n = 0$ damit als korrekt nachgewiesen.
- **Induktionsvoraussetzung:** Die obige Aussage gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt** ($n \to n + 1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt, dass $6^n + 4$ von 5 geteilt wird. Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} + 4$ von 5 geteilt wird.

$$\begin{aligned} 6^{n+1} + 4 &= 6 \cdot 6^n + 4 \\ &= 6 \cdot 6^n + 24 - 20 \\ &= 6 \cdot (6^n + 4) - 20 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5k - 20 \\ &= 5(\underbrace{6k - 4}_{\in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

Da sich $6^{n+1} + 4$ als ganzzahliges Vielfaches von 5 schreiben lässt, ist es also auch durch 5 teilbar.

2. Die Menge $Pal =_{df} \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom gerader Länge}\}$ kann induktiv definiert werden als die kleinste Menge, für die gilt:[1]

   - $\varepsilon \in Pal$.
   - Wenn $w \in Pal$, dann auch $awa,\ bwb \in Pal$.

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion die folgende Aussage:

   $$\forall w \in Pal.\ \#_a(w) \text{ ist gerade.}$$

   Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens „a" im Wort w.

   Lösung: Per struktureller Induktion über den Aufbau von $w \in Pal$.

   - **Fall 1 (Basisfall):** $w = \varepsilon$. Offensichtlich ist $\#_a(\varepsilon) = 0$, also gerade.
   - **Fall 2:** $w = aw'a$, $w' \in Pal$. Es ist $\#_a(w) = \#_a(w') + 2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\#_a(w')$ gerade, also ist auch $\#_a(w) = \#_a(w') + 2$ gerade.
   - **Fall 3:** $w = bw'b$, $w' \in Pal$. Es ist $\#_a(w) = \#_a(w')$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\#_a(w')$ gerade, damit ist auch $\#_a(w)$ gerade.

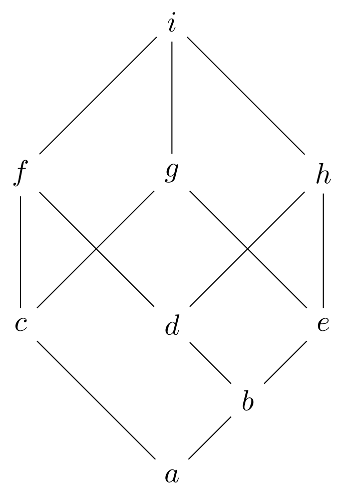
   Weitere Fälle sind aufgrund der induktiven Definition von Pal nicht zu betrachten.

[1] Generell sind Palindrome Worte, die vorwärts und rückwärts gelesen übereinstimmen.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

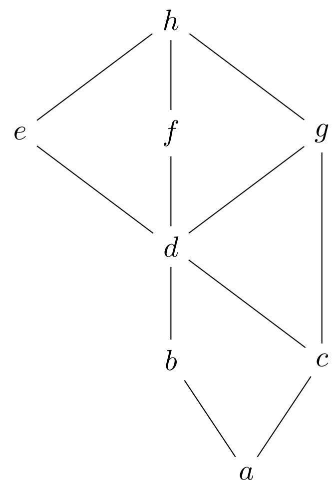
Aufgabe 4 (Verbände) **[5+5=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie, dass die folgende, über ein Hasse-Diagramm dargestellte Halbordnung kein Verband ist:



Lösung: Es liegt kein Verband vor, da $\sup\{b, c\}$ nicht existiert. f und g sind obere Schranken für b und c, es gibt aber keine kleinste obere Schranke.

2. Zeigen Sie, dass der folgende Verband nicht distributiv ist:



Lösung: Es gilt

$$e \curlywedge (f \curlyvee g) = e \curlywedge h = e \neq d = d \curlyvee d = (e \curlywedge f) \curlyvee (e \curlywedge g),$$

so dass in diesem Fall die Distributivitätseigenschaft verletzt ist.

3. $(V, \curlywedge, \curlyvee)$ sei ein distributiver Verband, a und b seien zwei Elemente von V mit $a \preceq b$.
   Zeigen Sie:
   Die Abbildung $f : V \to V$, definiert durch

$$f(x) =_{def} (x \curlyvee a) \curlywedge b$$

   für alle $x \in V$ ist

   (a) ein $\curlywedge$-Homomorphismus und
   (b) ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

Lösung:

(a) f ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus:

$$\begin{aligned} f(x \curlywedge y) &= ((x \curlywedge y) \curlyvee a) \curlywedge b \\ &= ((x \curlyvee a) \curlywedge (y \curlyvee a)) \curlywedge b && \text{(Komm. + Distr.)} \\ &= ((x \curlyvee a) \curlywedge (y \curlyvee a)) \curlywedge (b \curlywedge b) && \text{(Idemp.)} \\ &= ((x \curlyvee a) \curlywedge b) \curlywedge ((y \curlyvee a) \curlywedge b) && \text{(Ass. + Komm.)} \\ &= f(x) \curlywedge f(y) \,. \end{aligned}$$

(b) f ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus:

$$\begin{aligned} f(x \curlyvee y) &= ((x \curlyvee y) \curlyvee a) \curlywedge b \\ &= ((x \curlyvee y) \curlyvee (a \curlyvee a)) \curlywedge b && \text{(Idemp.)} \\ &= ((x \curlyvee a) \curlyvee (y \curlyvee a)) \curlywedge b && \text{(Ass. + Komm.)} \\ &= ((x \curlyvee a) \curlywedge b) \curlyvee ((y \curlyvee a) \curlywedge b) && \text{(Komm. + Distr.)} \\ &= f(x) \curlyvee f(y) \,. \end{aligned}$$

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Gruppen) **[4+2+4=10 Punkte]**

1. Die folgende Verknüpfungstafel einer kommutativen Gruppe mit den vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ lässt sich auf genau eine Weise vervollständigen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge und begründen Sie, dass diese in eindeutiger Weise festliegen.

$\circ$	a	b	c	d
a				
b		a		
c		d		
d		c	b	

Tipp: Bestimmen Sie zuerst das neutrale Element.

Lösung: a ist offensichtlich das neutrale Element, denn aus $c \circ b = d$ folgt, dass weder b noch c neutral sein können. Aus $d \circ b = c$ folgt, dass auch d nicht neutral ist. Setzen wir in die Multiplikationstafel ein, dass a das neutrale Element ist und nutzen aus, dass die Gruppe Abelsch ist, so können wir die Multiplikationstafel weiter ausfüllen:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d		b
d	d	c	b	

Die Elemente c und d müssen auch ein Inverses haben. Hierfür scheiden anhand der obigen Tabelle jedoch a, b, d bzw. a, b, c aus, da keine der Verknüpfungen dieser Elemente mit c bzw. d das neutrale Element a ergibt. Es bleibt also nur $c \circ c = a$ sowie $d \circ d = a$. Die gesuchte Multiplikationstafel ist daher

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

2. Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe S_4 und die Hintereinanderausführung jeweils zweier in Zykelschreibweise gegebener Permutationen. Geben Sie das Resultat ebenfalls in Zykelschreibweise an:

   (a) $(1\,2\,3\,4) \circ (1\,3\,4) \; = (1, 4, 2, 3)$

   (b) $(1\,4\,2) \circ (1\,3\,4) \; = (1, 3, 2)$

3. Sei $n \geq 2$ und S_n die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$U_n \ =_{df} \ \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = 1\}$$

eine Untergruppe von S_n ist.

Lösung:

Neutrales Element: Offensichtlich gilt $id(1) = 1$ für die identische Permutation $id \in S_n$. Also gilt $id \in U_n$.

Abgeschlossenheit: Seien $\pi_1, \pi_2 \in U_n$. Dann gilt:

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(1) \ = \ \pi_1(\pi_2(1)) \ \stackrel{\pi_2 \in U_n}{=} \ \pi_1(1) \ \stackrel{\pi_1 \in U_n}{=} \ 1$$

und somit $\pi_1 \circ \pi_2 \in U_n$.

Existenz der Inversen: Sei $\pi \in U_n$. Dann existiert ein Inverses π^{-1} in in S_n. Wir zeigen, dass dieses ein Element von U_n ist.

$$\pi^{-1}(1) \ \stackrel{\pi_1 \in U_n}{=} \ \pi^{-1}(\pi(1)) \ = \ (\pi^{-1} \circ \pi)(1) \ = \ id(1) \ = \ 1.$$

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Ringe und Körper) **[6+4=10 Punkte]**

1. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für:

   (a) einen Ring, der kein kommutativer Ring ist.

   (b) einen kommutativen Ring, der kein Integritätsbereich ist.

   (c) einen Integritätsbereich, der kein Körper ist.

   Begründen Sie für jedes Ihrer Beispiele, warum die weitergehende Eigenschaft verletzt ist.

   Lösung:

   (a) Der Ring der 2×2 Matrizen über $\mathbb{Z}$, also $\langle \mathbb{Z}^{2\times 2}, +, \cdot \rangle$ ist nicht kommutativ, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Der Ring $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ ist ein kommutativer Ring, aber nicht nullteilerfrei, denn

$$2 \cdot_4 2 = 0.$$

   Damit liegt auch kein Integritätsbereich vor.

   (c) Der Ring der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist ein Integritätsbereich, aber kein Körper, da ein multiplikativ Inverses zu 2 etwa fehlt.

2. Sei U die Menge der 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, deren Eintrag für die zweite Zeile und erste Spalte Null ist. Also

$$U =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Offensichtlich bildet U mit der Matrizenaddition und -multiplikation einen Unterring von $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot \rangle$, was hier ohne Nachweis vorausgesetzt werden kann.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : U \to \mathbb{R}$ mit $h \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} =_{df} a$ ein Ringhomomorphismus von $\langle U, +, \cdot \rangle$ nach $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ist.

Lösung:

Additive Homomorphie: Seien $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \right) &= h\left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix} \right) \\ &= a + a' \\ &= h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) + h\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Multipliktive Homomorphie: Seien $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \right) &= h\left(\begin{pmatrix} a \cdot a' & a \cdot b' + b \cdot c' \\ 0 & c \cdot c' \end{pmatrix} \right) \\ &= a \cdot a' \\ &= h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \cdot h\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Erhaltung des Einselements:

$$h(E_2) = h\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 7 (Vektorräume, Untervektorräume) [3+3+4=10 Punkte]

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $(\mathbb{Z}_5)^2$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $\{(a+b, a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. $\left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $\left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^2$.

Lösung:

1. $U = \{(a+b, a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum:
   - $U \neq \emptyset$, da $(0,0) \in U$.
   - Seien $(a+b, a-b)\,,\ (a'+b', a'-b') \in U$. Dann gilt
   $$\begin{aligned}(a+b, a-b) + \left(a'+b', a'-b'\right) &= \left(a+b+a'+b', (a-b) + \left(a'-b'\right)\right)\\ &= \left(\left(a+a'\right) + \left(b+b'\right), \left(a+a'\right) - \left(b+b'\right)\right) \in U.\end{aligned}$$
   - Seien $c \in \mathbb{R}$ und $(a+b, a-b) \in U$. Dann gilt
   $$\begin{aligned}c \cdot (a+b, a-b) &= (c \cdot (a+b)\,, c \cdot (a-b))\\ &= (c \cdot a + c \cdot b, c \cdot a - c \cdot b) \in U.\end{aligned}$$
2. Es liegt kein Untervektorraum vor:

   Es ist $(0,1) = ((-1)+1, 1^2) \in \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$, aber $(-1) \cdot (0,1) = (0,-1) \notin \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Es liegt kein Untervektorraum vor:

   Es ist $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Die Quadrate der Elemente von $\mathbb{Z}_5$ sind $0, 1$ und 4, da $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 \bmod 5 = 4$ und $4^2 \bmod 5 = 1$.

   Es gilt für das Element $(0,1) = (4+1, 1^2) \in \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\}$ und für $2 \in \mathbb{Z}_5$
   $$2 \cdot (0,1) = (0,2) \notin \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\}.$$

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Lineare Unabhängigkeit) **[3+7=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie: die Menge $M =_{df} \{(0,4,1,0)^t, (1,2,4,-1)^t, (2,2,1,-2)^t, (3,0,4,-3)^t\}$ ist eine linear abhängige Menge von Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

   Lösung:

   Die Menge ist linear abhängig, da

   $$\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\4\\-3\end{pmatrix}$$

   gilt, d.h. der erste Vektor lässt sich als Linearkombination der übrigen drei Vektoren darstellen. Das gilt hier sogar für alle Vektoren, es ist aber nicht notwendig, das zu zeigen.

2. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_{df} \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $f_1(x) =_{df} 2^x$, $f_2(x) =_{df} x^2$ und $f_3(x) =_{df} 2x$ linear unabhängig sind.

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Funktionen f_1, f_2 und f_3 linear unabhängig sind, wenn die Gleichung
   $$a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 = \mathbf{0}$$
   über Variablen $a, b, c \in \mathbb{R}$ nur die triviale Lösung $a = b = c = 0$ hat, wobei $\mathbf{0}$ die konstante Nullfunktion ist.

Lösung:
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass $a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 = \mathbf{0}$ gilt. Das bedeutet, dass $a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3$ die konstante Nullfunktion ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x) + c \cdot f_3(x) = 0.$$

Insbesondere muss diese Bedingung für $x_1 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ erfüllt sein. Wir erhalten daher drei Gleichungen, die erfüllt sein müssen:

$$\begin{array}{lllll}
A) & a \cdot 2^{-1} & + b \cdot (-1)^2 & + c \cdot 2 \cdot (-1) & = 0 \\
B) & a \cdot 2^0 & + b \cdot 0^2 & + c \cdot 2 \cdot 0 & = 0 \\
C) & a \cdot 2^1 & + b \cdot 1^2 & + c \cdot 2 \cdot 1 & = 0
\end{array}$$

Wenn wir uns Gleichung $B)$ anschauen, sehen wir sofort, dass $a = 0$ sein muss, damit $a + 0 + 0 = 0$ gilt. Setzen wir dies in $A)$ und $C)$ ein, erhalten wir:

$$\begin{array}{lllll}
A') & 0 & + b & - 2c & = 0 \\
C') & 0 & + b & + 2c & = 0
\end{array}$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen erhält man, dass $b = 0$ ist. Durch Einsetzen von $b = 0$ in $A')$ folgt schließlich, dass auch $c = 0$ gelten muss. Die einzige Lösung, die $A)$, $B)$ und $C)$ erfüllt, ist also $a = b = c = 0$, und damit sind die Funktionen linear unabhängig.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Gleichungssystem, Rang einer Matrix) **[8+2=10 Punkte]**

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix $A \in (\mathbb{Z}_3)^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Da wir in $\mathbb{Z}_3$ rechnen, können wir die Matrix alternativ auch schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen die Matrix mit Zeilenumformungen in Stufenform und lesen den Rang ab.

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{A_{3,2}(1)}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{A_{4,3}(-1)}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_{1,2}(1)}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{A_{1,3}(2)}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{M_4(2)}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{V_{2,4}}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{V_{1,2}}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

In $\mathbb{Z}_3$ darf nicht durch 3 geteilt werden, und eine Multiplikation mit 3 ist keine Äquivalenzumformung.

2. Betrachten Sie erneut die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Wert hat $\det(A)$?

Lösung:
Der Wert der Determinanten ist Null, da der Rang der Matrix (laut Aufgabenteil 1) zwei ist. Man kann auch an der Matrix ablesen, dass die Spalten linear abhängig sind, da die dritte und vierte Spalte gleich sind. Das genügt, um zu sehen, dass die Determinante 0 ist. Alternativ kann man auch die umgeformte Matrix aus Aufgabenteil 1 betrachten, die eine Dreiecksmatrix ist. Dort kann man die Determinante als Produkt der Diagonalen ablesen (und auch so erkennen, dass sie Null ist).

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Wissensfragen) **[8+2+2=12 Punkte]**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch (jew. 1 Punkt pro richtiger Antwort)? Begründen Sie insgesamt **zwei** Antworten ausführlich (jew. 2 Punkte pro richtiger Begründung). Falls mehr als zwei Antworten begründet wurden, machen Sie die zu wertenden Antworten kenntlich. Andernfalls werden die ersten beiden Antworten gewertet.

Hinweis: Anders als in der Probeklausur ist für die Begründungen eine Differenzierung zwischen „wahr"- und „falsch"-Antworten **nicht** vorgesehen.

1. Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$.
2. Die Verknüpfung einer injektiven Abbildung $f \colon A \to B$ mit einer surjektiven Abbildung $g \colon B \to C$ ergibt eine bijektive Abbildung $g \circ f \colon A \to C$.
3. In einem Verband $(V, \preceq)$ ist jeder $\curlywedge$-Homomorphismus auch ein Ordnungshomomorphismus.
4. Die Rechtskürzungsregel ($a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$) gilt allgemein in Monoiden.
5. Die symmetrische Gruppe S_5 hat eine Untergruppe mit 11 Elementen.
6. In einer Abelschen Gruppe ist jede Untergruppe auch ein Normalteiler.
7. Es gibt keinen Vektorraumisomorphismus von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$.
8. $\{\vec{0}\}$ ist eine Basis des Nullvektorraums $V_0 =_{df} \{\vec{0}\}$.

Lösung:

1. **Wahr.** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ sowie $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Nach der Definition von Gleichmächtigkeit existieren damit jeweils bijektive Abbildungen zwischen diesen Mengen. Sind $g \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sowie $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jeweils Bijektionen, so lässt sich die Bijektion $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$ definieren durch $f(q) =_{df} (n, m, k)$, wobei $(n, \ell) = g(q)$ und $(m, k) = h(\ell)$ sei. Alternativ kann man darauf verweisen, dass ein endliches kartesisches Produkt abzählbarer Mengen immer eine abzählbare Menge ergibt, weshalb $\mathbb{N}^3$ abzählbar und damit gleichmächtig zu $\mathbb{Q}$ ist.
2. **Falsch.** Man betrachte als Gegenbeispiel $A =_{df} \{a\}, B =_{df} \{b_1, b_2\}, C =_{df} \{c_1, c_2\}$, sowie die Funktionen $f \colon A \to B$ mit $f(a) =_{df} b_1$, und $g \colon B \to C$ mit $g(b_1) =_{df} c_1$ sowie $g(b_2) =_{df} c_2$. Offensichtlich ist f injektiv und g surjektiv (sogar bijektiv). Jedoch ist die Abbildung $g \circ f \colon A \to C$ nicht bijektiv, da c_2 kein Urbild besitzt.
3. **Wahr.** Der Zusammenhang zwischen der ordnungstheoretischen und der algebraischen Sicht auf Verbände wird beschrieben durch

   $$a \preceq b \Leftrightarrow a = a \curlywedge b.$$

   Für einen Ordnungshomomorphismus $f \colon (V, \preceq) \to (V', \preceq')$ muss für alle $a, b \in V$ gelten: $a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq' f(b)$. Dies lässt sich wie folgt nachweisen, unter der Voraussetzung dass f ein $\curlywedge$-Homomorphismus ist:

   $$a \preceq b \Rightarrow a = a \curlywedge b \Rightarrow f(a) = f(a \curlywedge b) \Rightarrow f(a) = f(a) \curlywedge' f(b) \Rightarrow f(a) \preceq' f(b).$$

4. **Falsch.** Zwar gibt es Monoide (die keine Gruppen sind), in denen die Rechtskürzungsregel gilt (bspw. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$). Im Allgemeinen sind für die Rechtskürzungsregel jedoch inverse Elemente nötig. Ein Gegenbeispiel für die Aussage ist das Monoid $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ mit neutralem Element 1: hier gilt bspw. $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, jedoch $1 \neq 2$.

5. **Falsch.** Nach dem Satz von Lagrange teilt die Kardinalität einer Untergruppe immer die Kardinalität der entsprechenden (Ober-)Gruppe. Jedoch ist 11 kein Teiler von $|S_5| = 5! = 120$.

6. **Wahr.** Ein Normalteiler ist eine Untergruppe, deren Links- und Rechtsnebenklassen übereinstimmen. Für eine Gruppe $\langle G, \oplus \rangle$ sind die Nebenklassen einer Untergruppe $H \leq G$ definiert als $a \oplus H =_{df} \{a \oplus h \,|\, h \in H\}$ bzw. $H \oplus a =_{df} \{h \oplus a \,|\, h \in H\}$. In einer Abelschen (d.h. kommutativen) Gruppe gilt $a \oplus h = h \oplus a$ für alle $h, a \in G$, womit Links- und Rechtsnebenklassen zusammenfallen.

7. **Wahr.** Ein Vektorraumisomorphismus ist nur zwischen Vektorräumen gleicher Dimension möglich, jedoch gilt $\dim R^3 = 3 < \dim R^5 = 5$.

8. **Falsch.** Der Nullvektorraum hat die leere Menge als Basis; es gilt $\langle \emptyset \rangle = V_0$. Damit ist $\{\vec{0}\}$ keine Basis, da sie (bspw.) nicht inklusionsminimal ist.

Name, Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen