MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dr. Oliver Rüthing

KW 28 (8.7.2014)

Themen der heutigen Übung:

- Lineare Abbildungen:
  - Matrix einer linearen Abbildung
  - Basiswechsel
  - Basiswechselmatrix

Basis und Basiswechsel

Basis und Basiswechsel

Gegeben sind die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ mit Basis $B = \{(1,3,0)^t, (0,2,1)^t, (1,1,0)^t\}$ und $\mathbb{R}^4$ mit Standardbasis $E_4 = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,0,0)^t, (0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ist durch die Angabe der Bilder für die Basiselemente des $\mathbb{R}^3$ festgelegt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\ (1,3,0)^t\ ) &= (0,1,0,1)^t \\
\varphi(\ (0,2,1)^t\ ) &= (0,0,1,0)^t \\
\varphi(\ (1,1,0)^t\ ) &= (1,1,0,0)^t
\end{aligned}$$

1. Geben Sie die Matrix ${}_{E_4}[\varphi]_B$ von φ bezüglich der Basen B und E_4 an.
2. Bestimmen Sie die Matrix ${}_{E_4}[\varphi]_{E_3}$ von φ, wenn für $\mathbb{R}^3$ statt der Basis B die Standardbasis E_3 zugrunde gelegt wird.

Basis und Basiswechsel

Basis und Basiswechsel

4. Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$.
5. Ist die Matrix ${}_{E_4}[\varphi]_B$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Basiswechsel

Basiswechsel

Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B' = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{B'}[id]_B$ von B auf B'.
2. Wie lässt sich aus ${}_{B'}[id]_B$ die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_{B'}$ von B' auf B gewinnen?