MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dr. Oliver Rüthing

KW 27 (30.6.2014)

Themen der heutigen Übung:

- Lineare Abbildungen:
  - Matrix einer linearen Abbildung
  - Kern und Bild linearer Abbildungen
  - Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die zu φ gehörige darstellende Matrix.
2. Welcher der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt in $Kern(\varphi)$, welcher in $Bild(\varphi)$?
3. Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$ und $Bild(\varphi)$ und geben Sie jeweils ein Erzeugendensystem an. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
4. Entscheiden Sie, ob φ ein Isomorphismus ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Kern und Bild einer idempotenten linearen Abbildung

1. Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die idempotent ist, d.h.: $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass $Kern(f) \cap Bild(f) = \{\vec{0}\}$ gilt.
2. Gilt die Aussage aus Teil 1) auch ohne die Voraussetzung der Idempotenz?

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Dimensionssatz für lineare Abbildungen

1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie: Wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $Kern(\varphi) = Bild(\varphi)$ gibt, so muss die Dimension von V eine gerade Zahl sein.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Dimensionssatz für lineare Abbildungen

1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie: Wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\mathit{Kern}(\varphi) = \mathit{Bild}(\varphi)$ gibt, so muss die Dimension von V eine gerade Zahl sein.
2. Richtig oder falsch?
   Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathit{Kern}(\varphi) = \langle (1,0,0,0)^t \rangle$.