MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dr. Oliver Rüthing

KW 25 (16.6.2014)

Themen der heutigen Übung:

- Vektorräume:
    - Untervektorräume
    - Linearkombinationen und Erzeugendensysteme
    - Lineare (Un-)abhängigkeit
    - Basis und Dimension

Untervektorräume

Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Beweisen oder widerlegen Sie entsprechend.

1. $U_1 \;=_{df}\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot \vec{x} = 3 \cdot \vec{x}\}$ für eine fest vorgegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
2. $U_2 \;=_{df}\; \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 2x \leq y \;\vee\; y \leq x\}$

Untervektorräume

Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Beweisen oder widerlegen Sie entsprechend.

1. $U_1 \;=_{df}\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot \vec{x} = 3 \cdot \vec{x}\}$ für eine fest vorgegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
2. $U_2 \;=_{df}\; \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 2x \leq y \;\vee\; y \leq x\}$

Erinnerung: Def. Untervektorraum

Eine Teilmenge U eines $K-$Vektorraumes V heißt Untervektorraum (oder Teilvektorraum), falls

1. $U \neq \emptyset$
2. $\vec{x}, \vec{y} \in U \;\Rightarrow\; \vec{x} + \vec{y} \in U$
3. $\vec{x} \in U, s \in K \;\Rightarrow\; s \cdot \vec{x} \in U$

Untervektorräume

Untervektorräume des $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

Zeigen Sie dass

$$U \;=_{df} \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$$

Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist.

Lineare (Un-)abhängigkeit

Lineare (Un-)abhängig im $\mathbb{R}^3$

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u} = (2, 1, 2)^t$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)^t$ und $\vec{w} = (0, 1, -1)^t$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.
2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (2, 1, -2)^t$, $\vec{v} = (0, 5, 2)^t$, $\vec{w} = (1, 2, 1)^t$ und $\vec{z} = (3, 5, -3)^t$ des $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie $\vec{z}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

Lineare (Un-)abhängigkeit

Lineare (Un-)abhängig im $\mathbb{R}^3$

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u} = (2,1,2)^t$, $\vec{v} = (-1,0,1)^t$ und $\vec{w} = (0,1,-1)^t$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.
2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (2,1,-2)^t$, $\vec{v} = (0,5,2)^t$, $\vec{w} = (1,2,1)^t$ und $\vec{z} = (3,5,-3)^t$ des $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie $\vec{z}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

Erinnerung: Charakterisierung linearer Unabhängigkeit

Eine Menge $M \subseteq V$ (wobei V ein K-Vektorraum ist) ist linear abhängig, gdw. der Nullvektor sich als nichtiviale Linearkombination darstellen lässt:

$$s_1 \vec{v_1} + \ldots + s_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

mit $\vec{v_i} \in M$ paarweise verschieden und $s_j \neq 0$ für mindestens ein $1 \leq j \leq n$.

Lineare (Un-)abhängigkeit

Lineare (Un-)abhängig im $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definiert durch $f(x) =_{df} x^2$ und $g(x) =_{df} \frac{1}{2}\sqrt{|x|}$ linear unabhängig sind.

Basis eines Vektorraumes

Basis von $(\mathbb{Z}_7)^2$

Wir betrachten den Vektorraum $V = (\mathbb{Z}_7)^2$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

Basis eines Vektorraumes

Richtig oder falsch

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist einziges Element der Basis des trivialen Vektorraumes $\{\vec{0}\}$.