MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dipl.-Inf. Malte Isberner

KW 21/22 (21.5./26.5.2014)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Verbände
    - Algebraische Sicht
    - Distributive Verbände
    - Unter- und Teilstrukturen
    - Homomorphismen

Verbände – algebraische Sicht

Endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$

Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein algebraischer Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor?

Verbände – algebraische Sicht

Endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$

Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein algebraischer Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor?

Algebraische Verbände

Eine Menge V mit zwei inneren Verknüpfungen $\curlywedge$ und $\curlyvee$ heißt (algebraischer) Verband gdw. die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität und Absorption gelten.

Verbände – algebraische Sicht

Endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$

Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein algebraischer Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor?

Algebraische Verbände

Eine Menge V mit zwei inneren Verknüpfungen $\curlywedge$ und $\curlyvee$ heißt (algebraischer) Verband gdw. die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität und Absorption gelten.
Sind $\curlywedge$ und $\curlyvee$ bekannte Operationen, die die obigen Gesetze erfüllen, so ist nachzuweisen dass es sich auf V um innere Verknüpfungen handelt (d.h. Abgeschlossenheit gilt):

$$\forall x, y \in V \,.\, x \curlywedge y \in V \wedge x \curlyvee y \in V \,.$$

Hasse-Diagramme, Distributivität und Ordnungshomomorphismen

Verbände

Wir betrachten den Teilbarkeitsverband auf $V =_{df} \{0, 1, \ldots, 6\}$, d.h. $(V, |)$.

1. Zeichen Sie das Hasse-Diagramm von V
2. Geben Sie alle minimalen und maximalen Elemente für die Teilmenge $\{2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq V$ an. Gibt es auch ein kleinstes oder größtes Element?
3. Ist $(V, |)$ distributiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Geben Sie einen injektiven Ordnungshomomorphismus $h\colon (V, |) \to (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ an.

Verbandshomomorphismen

Homomorphismen

Sei $(V_1, \preceq_1) =_{df} (\mathbb{N}, |)$ der Verband der natürlichen Zahlen mit Teilbarkeitsbeziehung und sei $(V_2, \preceq_2) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen. Wir betrachten die Abbildung:

$$h\colon V_1 \to V_2, h(n) =_{df} \{m \in \mathbb{N} \mid m|n\}.$$

Eine natürliche Zahl n wird also auf die Menge ihrer Teiler abgebildet. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. h ist ein Ordnungshomomorphismus
2. h ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus
3. h ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus

(Un-)Endliche und Distributive Verbände

Endliche Verbände

Begründen oder widerlegen Sie:

1. Jeder endliche Verband besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.
2. Jede endliche partiell geordnete Menge, die ein kleinstes und ein größtes Element besitzt, ist bereits ein Verband.

(Un-)Endliche und Distributive Verbände

Endliche Verbände

Begründen oder widerlegen Sie:

1. Jeder endliche Verband besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.
2. Jede endliche partiell geordnete Menge, die ein kleinstes und ein größtes Element besitzt, ist bereits ein Verband.

Unendlicher, nichtdistributiver Verband

Geben Sie einen unendlichen Verband an, der nicht distributiv ist. Zeigen Sie, wo die Distributivität verletzt wird.