MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dipl.-Inf. Malte Isberner

KW 19/20 (7.5./12.5.2014)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Induktives Beweisen
  - Vollständige Induktion
  - Verallgemeinerte Induktion
  - Strukturelle Induktion
  - Noethersche Induktion

Zum Einstieg ...

Wissensfragen (zu Relationen und Funktionen)

Wahr oder falsch?

1. Die Freundschaftsbeziehung unter Personen ist eine Äquivalenzrelation.
2. Der Schnitt zweier Äquivalenzrelationen ist eine Äquivalenzrelation.
3. Die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$.

Vollständige Induktion

Fibonacci

Die Fibonaccifunktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathrm{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathrm{fib}(n) &=_{df} \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} (\mathrm{fib}(i))^2 = \mathrm{fib}(n) \cdot \mathrm{fib}(n+1).$$

Vollständige Induktion

Geometrische Summe

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in N$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Verallgemeinerte Induktion

Fibonacci

Die Fibonaccifunktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathrm{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathrm{fib}(n) &=_{df} \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \text{ für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{fib}(n) \leq \left(\frac{4}{7}\right)^n .$$

Strukturelle Induktion

Boolesche Terme

1. Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.
2. Zeigen Sie, dass für jeden Booleschen Term $t \in \mathcal{BT}$ ein semantisch äquivalenter Term t' existiert, der weder T noch F enthält.
3. Zeigen Sie, dass für alle negationsfreien Booleschen Terme $t \in \mathcal{BT}$ gilt:

$$\#_V(t) \leq 2 \cdot \#_O(t) + 1,$$

wobei $\#_V(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Variablen und $\#_O(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Operatoren bezeichnet.

Strukturelle Induktion

Boolesche Terme

1. Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.
2. Zeigen Sie, dass für jeden Booleschen Term $t \in \mathcal{BT}$ ein semantisch äquivalenter Term t' existiert, der weder T noch F enthält.
3. Zeigen Sie, dass für alle negationsfreien Booleschen Terme $t \in \mathcal{BT}$ gilt:

$$\#_V(t) \leq 2 \cdot \#_O(t) + 1,$$

wobei $\#_V(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Variablen und $\#_O(t)$ die Anzahl der in t vorkommenden Operatoren bezeichnet.

Erinnerung: Syntax Boolescher Terme

$$\mathcal{BT} ::= X \in \mathcal{V} \mid \mathrm{T} \mid \mathrm{F} \mid \neg\mathcal{BT} \mid (\mathcal{BT} \wedge \mathcal{BT}) \mid (\mathcal{BT} \vee \mathcal{BT})$$

Noethersche Induktion

Funktion `reverse`

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}\colon A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.
Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Noethersche Induktion

Funktion `reverse`

Sei A ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Funktion $\texttt{reverse}\colon A^* \to A^*$, die Worte aus A^* umdreht.

- Für das leere Wort ε: $\texttt{reverse}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für $w \in A^*$ und $a \in A$: $\texttt{reverse}(w \cdot a) = a \cdot \texttt{reverse}(w)$.

Der Operator $\cdot$ steht für die bekannte Konkatenation von Worten aus A^*.
Beweisen Sie durch Noethersche Induktion über die Teilwortbeziehung auf w:

$$\forall v, w \in A^*. \texttt{reverse}(v \cdot w) = \texttt{reverse}(w) \cdot \texttt{reverse}(v).$$

Teilwortbeziehung

Sei A ein Alphabet, und seien $v, w \in A^*$ Wörter über A. Die Teilwortbeziehung $v \leqslant w$ ist wie folgt formal definiert:

$$v \leqslant w \Leftrightarrow_{df} \exists u_1, u_2 \in A^*. u_1 \cdot v \cdot u_2 = w.$$

$\leqslant$ ist eine Noethersche partielle Ordnung.