MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dipl.-Inf. Malte Isberner

KW 18/19 (30.4./5.5.2014)

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Relationen ...
  - Äquivalenzrelationen
  - Partitionen
- ... und Funktionen
  - Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
  - Funktionskomposition
- Induktives Beweisen
  - Vollständige Induktion

Zum Einstieg ...

Wissensfragen (zu Aussagen und Mengen)

Wahr oder falsch?

1. Die Potenzmenge der leeren Menge $\emptyset$ ist ebenfalls leer.
2. Für zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist $((\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$ eine Tautologie.
3. Die Aussage $\forall x \in \emptyset . x \neq x$ ist wahr.

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch:

$$x \equiv_z y \Leftrightarrow_{df} z|(x - y).$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_z$ eine Äquivalenzrelation ist.

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch:

$$x \equiv_z y \Leftrightarrow_{df} z | (x - y).$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_z$ eine Äquivalenzrelation ist.

Äquivalenzrelation

Eine binäre homogene Relation $\approx \subseteq M \times M$ auf einer beliebigen Menge M heißt Äquivalenzrelation gdw.

1. $\approx$ ist reflexiv, d.h. $\forall x \in M. x \approx x$.
2. $\approx$ ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in M. (x \approx y \wedge y \approx z) \Rightarrow x \approx z$.
3. $\approx$ ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in M. x \approx y \Rightarrow y \approx x$.

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Urbildpartition, Äquivalenzrelation

Betrachten sie die Funktion $f\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f(x) =_{df} x^2 \mod 5.$$

1. Geben Sie die Urbildpartition P zu f an.
2. Geben Sie die durch P induzierte Äquivalenzrelation an.

Kleinste enthaltende Äquivalenzrelationen

Urbildpartition, Äquivalenzrelation

Sei $M =_{df} \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Betrachten Sie die Relation
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\} \subseteq M \times M$.

1. Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation R' auf M an, die R enthält.
2. Sei $S \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation. Ist es immer möglich, S zu einer Äquivalenzrelation durch Hinzufügen von Elementen zu ergänzen?

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Injektivität und Surjektivität

Welcher der folgenden Funktionen sind injektiv, welche sind surjektiv? Beweisen oder widerlegen Sie.

1. $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_1(z) =_{df} 3z - 1$
2. $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_2(z) =_{df} 3z^2 - 1$
3. $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f_3(q) =_{df} 3q - 1$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_1(z) =_{df} 3z - 1$
$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_2(z) =_{df} 3z^2 - 1$
$f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f_3(q) =_{df} 3q - 1$

Definitionen

- $f : A \to B$ ist injektiv gdw.

$$\forall a_1, a_2, \in A. a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

- $f : A \to B$ ist surjektiv gdw.

$$\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$$

- $f : A \to B$ ist bijektiv gdw. f ist injektiv und f ist surjektiv.

Injektivität, Surjektivität

Injektivität und Surjektivität

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f((n, m)) =_{df} n + m$$

surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Sei $f\colon A \to B$ eine injektive Funktion, und sei $g\colon B \to C$ eine surjektive Funktion.
Beweisen oder widerlegen Sie: $g \circ f\colon A \to C$ (Erinnerung: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$) ist bijektiv.

Vollständige Induktion

Fibonacci

Die Fibonaccifunktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathrm{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathrm{fib}(n) &=_{df} \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} (\mathrm{fib}(i))^2 = \mathrm{fib}(n) \cdot \mathrm{fib}(n+1).$$

Vollständige Induktion

Geometrische Summe

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in N$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$