MafI 1 Repetitorium – Übungen

Dipl.-Inf. Malte Isberner

KW 17/18 (23./28.4.2013)

Über mich

- E-Mail: `malte.isberner@tu-dortmund.de`
- Büro: OH 14, R 135 (noch)
- Sprechstunde: Nach Vereinbarung (per E-Mail)!

Organisatorisches

Studienleistung

- Abgabe dreier Probeklausurabschnitte
- Abgabetermine: 13.5., 10.6., 8.7.
- Studienleistung: min. 40% pro Abschnitt

Themenübersicht

Themen der heutigen Übung:

- Aussagen und Mengen
  - Beweis per Wahrheitstafel (Aussagen)
  - Axiomatisches Beweisen (Aussagen, Mengen)
  - Semantisches Beweisen (Mengen)

Modus Ponens

Wahrheitstafel

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

Modus Ponens

Wahrheitstafel

Das Beweisprinzip des *modus ponens* für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \tag{MP}$$

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von (MP) mithilfe einer Wahrheitstafel.

Axiomatischer Beweis

Beweisen Sie axiomatisch, dass (MP) äquivalent zu T ist. Es dürfen alle eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelengation, DeMorgan, Neutralität) verwendet werden.
Tipp: Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ lässt sich auch als $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ schreiben.

Axiome

Z.z: $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \land \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathrm{T}$

Axiome (Aussagenlogik)

$$
\begin{array}{rcll}
\mathcal{A} \land \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \land \mathcal{A} & \text{(Kommutativität)} \\
\mathcal{A} \lor \mathcal{B} & \equiv & \mathcal{B} \lor \mathcal{A} & \\
(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \land \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \land (\mathcal{B} \land \mathcal{C}) & \text{(Assoziativität)} \\
(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C} & \equiv & \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \lor \mathcal{C}) & \\
\mathcal{A} \land (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Absorption)} \\
\mathcal{A} \lor (\mathcal{A} \land \mathcal{B}) & \equiv & \mathcal{A} & \\
\mathcal{A} \land (\mathcal{B} \lor \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \lor (\mathcal{A} \land \mathcal{C}) & \text{(Distributivität)} \\
\mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C}) & \equiv & (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \land (\mathcal{A} \lor \mathcal{C}) & \\
\mathcal{A} \land \neg\mathcal{A} & \equiv & \mathbf{F} & \text{(Negation)} \\
\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{A} & \equiv & \mathbf{T} & \\
\hline
\mathcal{A} \land \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Idempotenz)} \\
\mathcal{A} \lor \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \\
\neg\neg\mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Doppelnegation)} \\
\neg(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{B} & \text{(deMorgansche Regeln)} \\
\neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) & \equiv & \neg\mathcal{A} \land \neg\mathcal{B} & \\
\mathbf{T} \land \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} & \text{(Neutralität)} \\
\mathbf{F} \lor \mathcal{A} & \equiv & \mathcal{A} &
\end{array}
$$

Axiomatisches Beweisen – Mengen

Δ-Distributivität

Beweisen Sie axiomatisch dass für beliebige Mengen $A, B, C \subseteq M$ gilt:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C). \qquad (\Delta\text{-Dist})$$

Zusätzlich zu den bekannten Axiomen dürfen Sie folgendes Gesetz anwenden:

$$X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}. \qquad (*)$$

Axiomatisches Beweisen – Mengen

Δ-Distributivität

Beweisen Sie axiomatisch dass für beliebige Mengen $A, B, C \subseteq M$ gilt:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C). \tag{Δ-Dist}$$

Zusätzlich zu den bekannten Axiomen dürfen Sie folgendes Gesetz anwenden:

$$X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}. \tag{*}$$

Symmetrische Differenz

Für eine zugrundeliegende Grundmenge M ist die symmetrische Differenz zweier Mengen $A, B \subseteq M$ definiert durch:

$$A \Delta B =_{df} (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement}).$$

Axiome – Mengenlehre

Δ-Dist (z.z.): $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$, $A \Delta B =_{df} (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement})$,
(*): $X \cap Y^{\complement} = X \cap (X \cap Y)^{\complement}$

Axiome (Mengenlehre)

$$
\begin{array}{rcll}
A \cap B & = & B \cap A & \text{(Kommutativität)} \\
A \cup B & = & B \cup A & \\
(A \cap B) \cap C & = & A \cap (B \cap C) & \text{(Assoziativität)} \\
(A \cup B) \cup C & = & A \cup (B \cup C) & \\
A \cap (A \cup B) & = & A & \text{(Absorption)} \\
A \cup (A \cap B) & = & A & \\
A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) & \text{(Distributivität)} \\
A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) & \\
A \cap A^{\complement} & = & \emptyset & \text{(Komplement)} \\
A \cup A^{\complement} & = & M & \\
\hline
A \cap A & = & A & \text{(Idempotenz)} \\
A \cup A & = & A & \\
A^{\complement\complement} & = & A & \text{(Doppelnegation)} \\
(A \cap B)^{\complement} & = & A^{\complement} \cup B^{\complement} & \text{(deMorgansche Regeln)} \\
(A \cup B)^{\complement} & = & A^{\complement} \cap B^{\complement} & \\
M \cap A & = & A & \text{(Neutralität)} \\
\emptyset \cup A & = & A &
\end{array}
$$

Semantisches Beweisen – Mengen

Semantisches Beweisen

Seien A, B, C Mengen.

1. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B).$$

Semantisches Beweisen – Mengen

Semantisches Beweisen

Seien A, B, C Mengen.

1. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B).$$

Erinnerung – Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge A ist die Menge aller ihrer Teilmengen (inkl. $\emptyset$ und A):

$$\mathfrak{P}(A) =_{df} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Semantisches Beweisen – Mengen

Semantisches Beweisen

Seien A, B, C Mengen.

1. Zeigen Sie:
$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B).$$
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
$$B \neq C \Rightarrow A \cap B \neq A \cap C.$$

Erinnerung – Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge A ist die Menge aller ihrer Teilmengen (inkl. $\emptyset$ und A):
$$\mathfrak{P}(A) =_{df} \{X \mid X \subseteq A\}.$$